Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Quadratische Gleichungen

Aufgabe: Bestimme die Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 – 6x + 5 = 0.$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende <u>Vorgehensweise</u>: Quadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $x^2 + bx + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen b, c genügen. Die Lösung der quadratischen Gleichung (*) ist dann: $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ (b-c-Formel). Um die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; die b-c-Formel führt auf die 0 bis 2 Lösungen der Gleichung.

II. Wir gehen gemäß der Lösungsformel wie folgt vor:

$x^2 – 6x + 5 = 0$	(b-c-Formel: b = -6, c = +5; Einsetzen der Zahlen)
$x_{1,2} = +\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5}$	(Ausrechnen)
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$	(Diskriminante bestimmen gemäß: $3^2 – 5 = 9 – 5 = 4 > 0$)
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{4}$	(Wurzel ziehen)
$x_{1,2} = 3 \pm 2$	(Lösungen x_1, x_2 gemäß Plus- und Minus-Teil der Formel)

$x_1 = 3 + 2 = 5$, $x_2 = 3 – 2 = 1$

Wir erhalten $x_1 = 5$ und $x_2 = 1$ als <u>Lösungen</u> der quadratischen Gleichungen; Lösungsmenge ist also: L = {1; 5}.

2. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende Vorgehensweise: Quadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $x^2 + bx + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen b, c genügen. Die Lösung der quadratischen Gleichung (*) ist dann: $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ (b-c-Formel). Um die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; die b-c-Formel führt auf die 0 bis 2 Lösungen der Gleichung.

Die Lösungsformel (b-c-Formel, „Mitternachtsformel") $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ ist dann so zu verstehen: Sind die reellen Zahlen b, c der quadratischen Gleichung vorgegeben, so ist die Zahl b zu halbieren und ihr Vorzeichen zu verändern (statt + also -, statt - also +), die (vorzeichenlose) halbierte Zahl wird, zum Quadrat genommen, in die Wurzel geschrieben, die Zahl c mit verändertem Vorzeichen (statt + also -, statt - also +) unter der Wurzel zu dem Quadrat hinzuaddiert bzw. von dem Quadrat abgezogen. Es ist dann zunächst die Diskriminante D = $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ (bzw. der Radikand) unter der Wurzel auszurechnen; nur für nichtnegatives D hat die quadratische Gleichung eine (D = 0) oder zwei Lösungen (D > 0). Das Ziehen der Wurzel ergibt die Lösungen nach der Lösungsformel, das $\pm$ in der Lösungsformel führt auf die Lösung mit dem + und auf die mit dem -.

II. Wir gehen gemäß der Lösungsformel wie folgt vor:

$x^2 - 6x + 5 = 0$	(b-c-Formel: b = -6, c = +5; Halbieren von b = -6 und Vorzeichenwechsel: +3 Übertragen des Quadrats von 3 als 3^2 in den Wurzelausdruck Vorzeichenwechsel bei c = +5 zu -5)
$x_{1,2} = +3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$	(Diskriminante bestimmen gemäß: $3^2 - 5 = 9 - 5 = 4 > 0$, d.h.: die quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen)
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{4}$	(Wurzel ziehen)
$x_{1,2} = 3 \pm 2$	(Lösungen x_1, x_2 gemäß Plus- und Minus-Teil der Formel)

$x_1 = 3 + 2 = 5$, $x_2 = 3 - 2 = 1$

Wir erhalten $x_1 = 5$ und $x_2 = 1$ als Lösungen der quadratischen Gleichungen; Lösungsmenge ist also: L = {1; 5}.

www.michael-buhlmann.de / 10.2023 / Aufgabe 1911