Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Skalarprodukt

Aufgabe: Überprüfe, dass für Vektoren des dreidimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ mit der Zuordnung:

$$< \vec{a}, \vec{b} >= a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2$$

ein Skalarprodukt vorliegt. Berechne damit zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Normen dieser Vektoren sowie die inneren Produkte zwischen den verschiedenen Vektoren.

Lösung: I. Auf einem reellen Vektorraum V (über dem Körper **R**) heißt eine reellwertige Zuordnung von Vektoren ein Skalarprodukt, wenn für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und reelle Zahlen r, s gilt:

Symmetrie: $< \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{b}, \vec{a} >$

Linearität: $< \vec{a}, r\vec{b} + s\vec{c} >= r < \vec{a}, \vec{b} > +s < \vec{a}, \vec{c} >$

Positive Definitheit: $< \vec{a}, \vec{a} >\geq 0$, $< \vec{a}, \vec{a} >= 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (Nullvektor).

Das Skalarprodukt macht aus dem reellen Vektorraum V einen euklidischen Vektorraum, auf dem zudem eine Norm, die Skalarproduktnorm, definiert ist, d.h. es gibt eine nichtnegativ-reellwertige Abbildung ||.|| auf dem Vektorraum mit $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{< \vec{a}, \vec{a} >}$, für die gilt:

Definitheit: $\left\|\vec{a}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Homogenität: $\left\|r\vec{a}\right\| = |r| \left\|\vec{a}\right\|$

Dreiecksungleichung: $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| \leq \left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|$

für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und reeller Zahl r.

II. Wir zeigen, dass die Zuordnung: $< \vec{a}, \vec{b} >= a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2$ ein Skalarprodukt ist. Es gilt die Symmetrie auf Grund von:

$$< \vec{a}, \vec{b} >= a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + 2b_3 a_3 - b_3 a_2 - b_2 a_3 =< \vec{b}, \vec{a} >.$$

Es gilt Linearität wegen:

$< \vec{a}, r\vec{b}+s\vec{c} > = a_1(rb_1+sc_1)+a_2(rb_2+sc_2)+2a_3(rb_3+sc_3)-a_2(rb_3+sc_3)-a_3(rb_2+sc_2) =$
$ra_1b_1+sa_1c_1+ra_2b_2+sa_2c_2+2ra_3b_3+2sa_3c_3-ra_2b_3-sa_2c_3-ra_3b_2-sa_3c_2 =$
$ra_1b_1+ra_2b_2+2ra_3b_3-ra_2b_3-ra_3b_2+sa_1c_1+sa_2c_2+2sa_3c_3-sa_2c_3-sa_3c_2 =$
$r\left(a_1b_1+a_2b_2+2a_3b_3-a_2b_3-a_3b_2\right)+s\left(a_1c_1+a_2c_2+2a_3c_3-a_2c_3-a_3c_2\right) = r < \vec{a}, \vec{b} > + s < \vec{a}, \vec{c} > .$

Es gilt positive Definitheit gemäß:

$< \vec{a}, \vec{a} > = a_1a_1+a_2a_2+2a_3a_3-a_2a_3-a_3a_2 = a_1^2+a_2^2+2a_3^2-2a_2a_3 = a_1^2+a_2^2-2a_2a_3+a_3^2+a_3^2 =$
$a_1^2+(a_2-a_3)^2+a_3^2 \geq 0+0+0 = 0$

$< \vec{a}, \vec{a} > = 0 \Leftrightarrow a_1^2+(a_2-a_3)^2+a_3^2 = \vec{0} \Leftrightarrow$ $a_1^2 = 0$, $(a_2-a_3)^2 = 0$, $a_3^2 = 0$ ⇔ $a_1 = 0$, $a_2-a_3 = 0$, $a_3 = 0$

⇔ $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Damit liegt mit $< \vec{a}, \vec{b} > = a_1b_1+a_2b_2+2a_3b_3-a_2b_3-a_3b_2$ ein Skalarprodukt für Vektoren des dreidimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^3$ vor.

III. Wir berechnen die Normen der Vektoren:

$$\left\|\vec{a}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{< \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} >} = \sqrt{0^2+(0-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\left\|\vec{b}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{< \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} >} = \sqrt{0^2+(1-1)^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left\|\vec{c}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{< \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} >} = \sqrt{1^2+(1-1)^2+1^2} = \sqrt{2}\,.$$

IV. Als Skalarprodukte zwischen den verschiedenen Vektoren erhalten wir:

$$< \vec{a}, \vec{b} > = < \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} > = 0\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1-0\cdot 1-1\cdot 1 = 1$$

$$< \vec{a}, \vec{c} > = < \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} > = 0\cdot 1+0\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1-0\cdot 1-1\cdot 1 = 1$$

$$< \vec{b}, \vec{c} > = < \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} > = 0\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1-1\cdot 1-1\cdot 1 = 1.$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1265