Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Binomialverteilung

Aufgabe: Ein Zufallsexperiment mit den Ergebnissen T („Treffer“) und N („Nichttreffer“) heißt ein Bernoulli-Experiment. Mit p als immer gleich bleibender Wahrscheinlichkeit für einen Treffer und n als Anzahl der Versuchswiederholung des Treffer-Nichttreffer-Experiments zählt die Zufallsvariable (Zufallsgröße) X die Anzahl der dabei auftretenden Treffer. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Treffer auftreten, errechnet sich dann nach der Bernoulliformel:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\text{, k = 0, 1, …n.}$$

Eine Zufallsvariable X, die der Bernoulliformel genügt, heißt binomialverteilt mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit): X ~ $B_{n;p}$.

a) Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit den Parametern n = 10 und p_X = 0,3, die Zufallsvariable Y binomialverteilt mit den Parametern n = 10 und p_Y = 0,7. Stelle für beide Zufallsvariablen die Binomialverteilung in einem Histogramm dar. Was fällt auf?

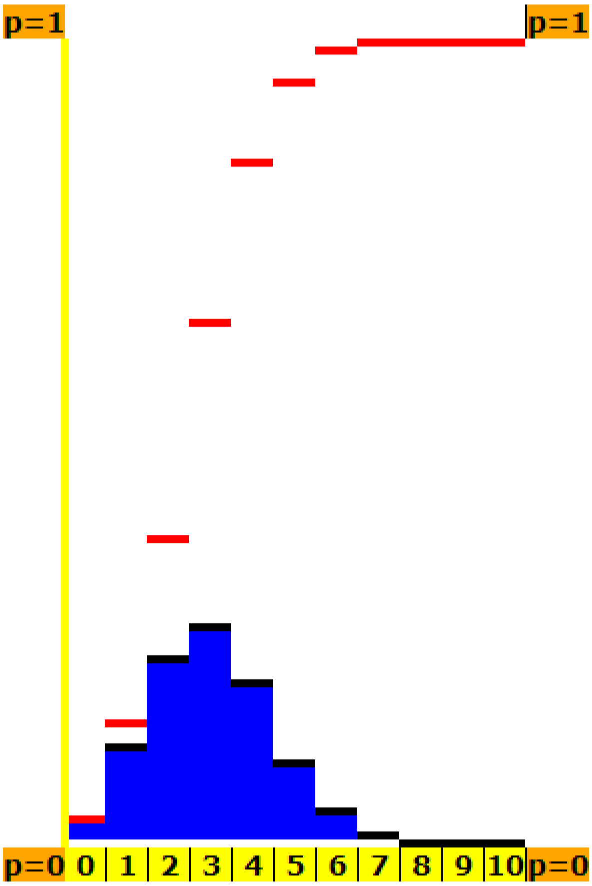
b) Zeige, dass für zwei Zufallsvariablen X ~ $B_{n;p}$ und Y ~ $B_{n;q}$ mit Anzahl n der Versuchswiederholungen und q = 1-p gilt:

$$p(X=k)=p(Y=n-k)\text{, k = 0, 1, …n.}$$

Lösung: a) Wir verwenden jeweils die Bernoulliformel $p(X=k)=\binom{n}{k}p_X^k(1-p_X)^{n-k}$ und $p(Y=k)=\binom{n}{k}p_Y^k(1-p_Y)^{n-k}$ um p(X=0), p(X=1), … p(X=10) bzw. p(Y=0), p(Y=1), … p(Y=10) zu errechnen und haben jeweils als Tabelle und Histogramm:

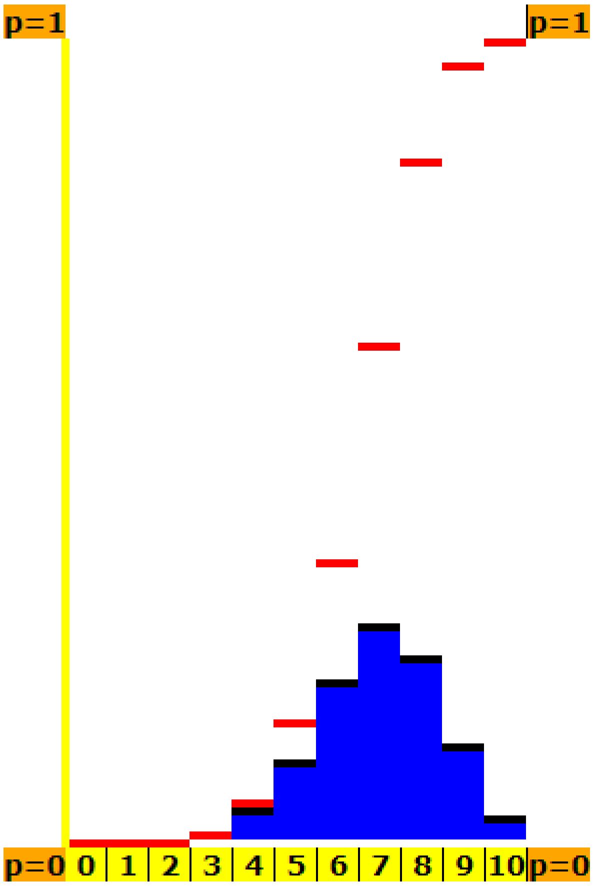
Zufallsvariable X ~ $B_{10;0,3}$		Zufallsvariable Y ~ $B_{10;0,7}$	
Wahrscheinlichkeitstabelle:		Wahrscheinlichkeitstabelle:	
n = 10	**B(10,0.3)**	**n = 10**	**B(10,0.7)**
k =	**p(X=k)** =	**k** =	**p(X=k)** =
0	0.028248	0	0.000006
1	0.121061	1	0.000138
2	0.233474	2	0.001447
3	0.266828	3	0.009002
4	0.200121	4	0.036757
5	0.102919	5	0.102919
6	0.036757	6	0.200121
7	0.009002	7	0.266828
8	0.001447	8	0.233474
9	0.000138	9	0.121061
10	0.000006	10	0.028248

Histogramm:



Zufallsvariable X ~ $B_{10;0,3}$

Histogramm:



Zufallsvariable Y ~ $B_{10;0,7}$

Wahrscheinlichkeitstabellen und Histogramme zeigen eine umgekehrte Reihenfolge gleicher Wahrscheinlichkeiten der Zufallsvariablen X und Y an. Es gilt damit: p(X=0) = p(Y=10), p(X=1) = p(Y=9), … p(X=10) = P(Y=0).

b) Wir beweisen für die Zufallsvariablen X ~ $B_{n;p}$ und Y ~ $B_{n;q}$ mit q = 1-p die Identität mit Hilfe der Bernoulliformel wie folgt:

$$p(Y=n-k)=\binom{n}{n-k}q^{n-k}(1-q)^{n-(n-k)}=\binom{n}{n-k}q^{n-k}(1-q)^{k}\underset{\left\{\begin{smallmatrix}p=1-q\\ q=1-p\end{smallmatrix}\right\}}{=}$$

$$\binom{n}{n-k}(1-p)^{n-k}p^{k}\underset{\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}}{=}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^{k}=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}=p(X=k).$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1328