Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Binomialverteilung

Aufgabe: Auf einem Glücksrad sind zehn Segmente mit jeweils gleichem Innenwinkel 36° angeordnet. Die Segmente stehen für T wie „Treffer“ und N wie „Nichttreffer“. Das Glücksrad wird mehrfach gedreht, es kommt auf einem Feld mit T als „Treffer“ und N als „Nichttreffer“ zu stehen, die Anzahl der Treffer wird ermittelt.

a) Am Glücksrad sind drei Segmente mit T als „Treffer“ markiert. Das Glücksrad wird zehn Mal gedreht. Begründe, dass ein Bernoulli-Experiment vorliegt und definiere die binomialverteilte Zufallsgröße X. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der nachstehenden Ereignisse:

A: Das Glücksrad kommt genau drei Mal auf einem Feld mit T als „Treffer“ zu stehen.
B: Die ermittelte Trefferanzahl beträgt höchstens 6.
C: Die Trefferanzahl ist größer als 5.
D: Die ermittelte Trefferanzahl schwankt zwischen 4 und 7.
E: Die Trefferanzahl ist nicht 8.
F: Das Glücksrad kommt mindestens einmal auf einem Feld mit T als „Treffer“ zu stehen.

b) Am Glücksrad sind drei Segmente mit T als „Treffer“ markiert. Wie oft muss das Glücksrad gedreht werden, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Treffer zu erhalten, mindestens 99 Prozent groß ist?

c) Das Glücksrad wird nun 50 Mal gedreht. Wie viele Segmente müssen mit T für „Treffer“ markiert werden, damit die Wahrscheinlichkeit, höchstens 20 Treffer zu erhalten, unter 1 Prozent sinkt?

1. Lösung: a) I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen“. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel:

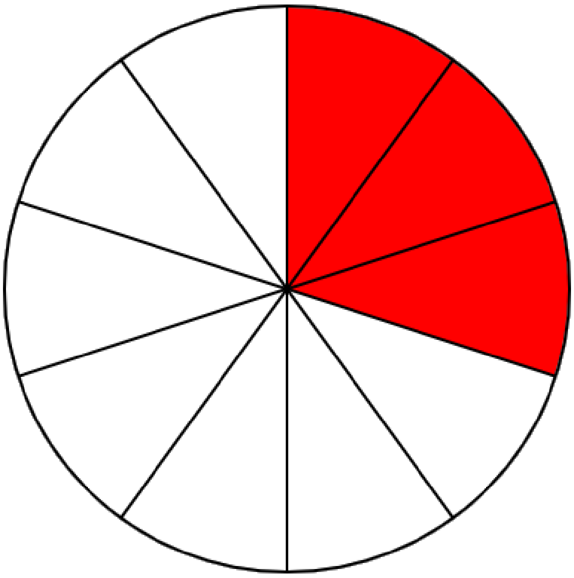
$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ k = 0, 1, …n.}$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ... \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten. Als Rechenregeln im Zusammenhang mit der Bernoulliformel ergeben sich:

$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1) = 1 - p(X\ge k)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\ge k+1) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1).$$

II. Gemäß Aufgabenstellung ist n = 10 und p = 3/10 = 0,3, so dass die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer beim Experiment mit dem Glücksrad zählt, binomialverteilt mit den Parametern n = 10 und p = 0,3 ist:

Glücksrad (T-Segmente rot):

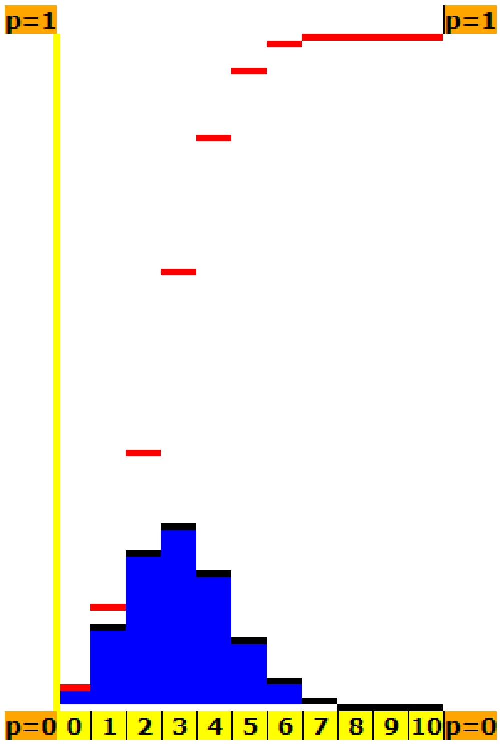


Zufallsvariable X ~ $B_{10;0,3}$

Wahrscheinlichkeitstabelle:

n = 10	p = 0.3	B(10; 0.3)
k =	p(X=k) =	P(X≤k) =
0	0.028248	0.028248
1	0.121061	0.149308
2	0.233474	0.382783
3	0.266828	0.649611
4	0.200121	0.849732
5	0.102919	0.952651
6	0.036757	0.989408
7	0.009002	0.99841
8	0.001447	0.999856
9	0.000138	0.999994
10	0.000006	1

Histogramm:



III. Mit Hilfe der Bernoulliformel errechnen sich die Wahrscheinlichkeiten als:

p(A) = p(X=3) = 0.028248
p(B) = p(X≤6) = 0.989408
p(C) = p(X>5) = 1 – p(X≤4) = 1 – 0.849732 = 0.150268
p(D) = p(4≤X≤7) = p(X≤7) – p(X≤3) = 0.99841 – 0.649611 = 0.348799
p(E) = p(X≠8) = 1 – p(X=8) = 1 – 0.001447 = 0.998553
p(F) = p(X≥1) = 1 – p(X≤0) = 1 – p(X=0) = 1 – 0.028248 = 0.971752.

b) Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer beim Experiment mit dem Glücksrad zählt, ist binomialverteilt mit den Parametern n und p = 0,3, wobei n als Anzahl der Versuchsdurchführungen zu bestimmen ist auf der Grundlage von:

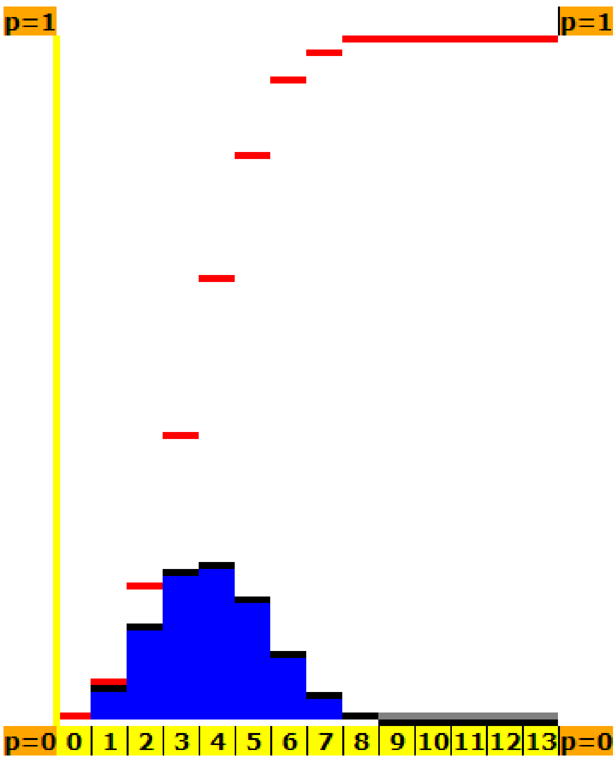
p(X≥1) ≥ 0,99 ⇔ 1 – p(X=0) ≥ 0,99 ⇔ -p(X=0) ≥ -0,01 ⇔ p(X=0) ≤ 0,01.

Wir gleichen die Anzahl der Versuchsdurchführungen n mit den dazugehörenden Wahrscheinlichkeiten p(X=0) ab und erhalten die tabellarische Übersicht:

n =	**p(X=0) =**
0	1
1	0.7
2	0.49
3	0.343
4	0.2401
5	0.16807
6	0.117649
7	0.082354
8	0.057648
9	0.040354
10	0.028248
11	0.019773
12	0.013841
13	0.009689
14	0.006782
15	0.004748
16	0.003323
17	0.002326
18	0.001628
19	0.00114
20	0.000798

Wir erhalten: n ≥ 13. Das Glücksrad muss mindestens 13 Mal gedreht werden, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Treffer zu erhalten, mindestens 99 Prozent groß ist.

Zufallsvariable $X \sim B_{13;0,3}$: n = 13, p = 0.3 -> p(X=0) = 0.0096889

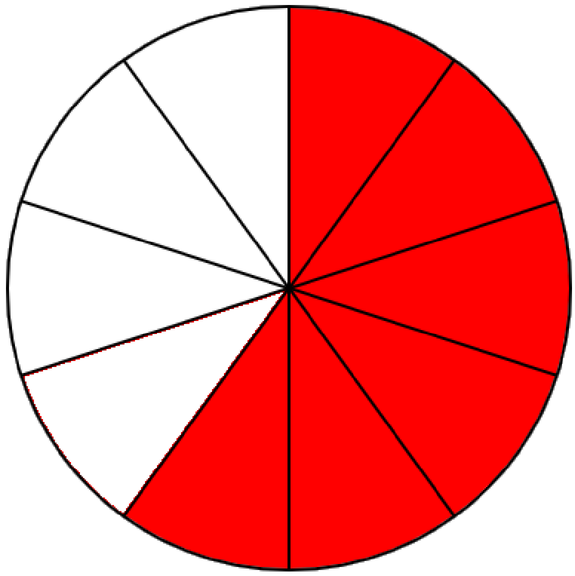


c) Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer beim Experiment mit dem Glücksrad zählt, ist binomialverteilt mit den Parametern n = 50 und p, wobei p als Trefferwahrscheinlichkeit wegen des Glücksrads mit 10 Segmenten nur die Wahrscheinlichkeiten p = 0, = 1/10 = 0,1, = 2/10 = 0,2, … = 9/10 = 0,9 oder = 1 annehmen kann. Wir gleichen die Trefferwahrscheinlichkeiten p mit den dazugehörenden Wahrscheinlichkeiten p(X≤20) ab und erhalten die tabellarische Übersicht:

p =	**p(X≤20)** =
0	1
0.1	1
0.2	0.999679
0.3	0.952236
0.4	0.561035
0.5	0.101319
0.6	0.00336
0.7	0.000011
0.8	0
0.9	0
1	0

Wir haben damit: p = 0,6, d.h. sechs Segmenten des Glücksrads wird die Bezeichnung T für „Treffer“ zugeordnet.

Glücksrad (T-Segmente rot):



2. Lösung: a) I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen". Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel:

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ k = 0, 1, …n.}$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten. Als Rechenregeln im Zusammenhang mit der Bernoulliformel ergeben sich:

$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1) = 1 - p(X\ge k)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\ge k+1) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1).$$

II. Gemäß Aufgabenstellung ist n = 10 und p = 3/10 = 0,3, so dass die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer beim Experiment mit dem Glücksrad zählt, binomialverteilt mit den Parametern n = 10 und p = 0,3 ist:

Wahrscheinlichkeitstabelle:

n = 10	**p = 0.3**	**B(10; 0.3)**
k =	**p(X=k) =**	**P(X≤k) =**
0	0.028248	0.028248
1	0.121061	0.149308
2	0.233474	0.382783
3	0.266828	0.649611
4	0.200121	0.849732
5	0.102919	0.952651
6	0.036757	0.989408
7	0.009002	0.99841
8	0.001447	0.999856
9	0.000138	0.999994
10	0.000006	1

III. Mit Hilfe der Bernoulliformel errechnen sich die Wahrscheinlichkeiten als:

$p(A) = p(X=3) = 0.028248$
$p(B) = p(X\le 6) = 0.989408$
$p(C) = p(X>5) = 1 - p(X\le 4) = 1 - 0.849732 = 0.150268$
$p(D) = p(4\le X\le 7) = p(X\le 7) - p(X\le 3) = 0.99841 - 0.649611 = 0.348799$
$p(E) = p(X\ne 8) = 1 - p(X=8) = 1 - 0.001447 = 0.998553$
$p(F) = p(X\ge 1) = 1 - p(X\le 0) = 1 - p(X=0) = 1 - 0.028248 = 0.971752.$

b) Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer beim Experiment mit dem Glücksrad zählt, ist binomialverteilt mit den Parametern n und p = 0,3, wobei n als Anzahl der Versuchsdurchführungen zu bestimmen ist auf der Grundlage von:

$p(X\ge 1) \ge 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - p(X=0) \ge 0{,}99 \Leftrightarrow -p(X=0) \ge -0{,}01 \Leftrightarrow p(X=0) \le 0{,}01.$

Da $p(X=0) = (1-p)^n$ mit Trefferwahrscheinlichkeit p ist, ist also mit p = 0,3 => 1-p = 0,7 die Ungleichung $0,7^n \leq 0,01$ nach n auszurechnen. Es gilt:

$0,7^n \leq 0,01 \Rightarrow n \geq \ln(0,01)/\ln(0,7) = 12,91$,

also: $n \geq 13$. Das Glücksrad muss mindestens 13 Mal gedreht werden, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Treffer zu erhalten, mindestens 99 % groß ist.

c) Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer beim Experiment mit dem Glücksrad zählt, ist binomialverteilt mit den Parametern n = 50 und p, wobei p als Trefferwahrscheinlichkeit wegen des Glücksrads mit 10 Segmenten nur die Wahrscheinlichkeiten p = 0, = 1/10 = 0,1, = 2/10 = 0,2, … = 9/10 = 0,9 oder = 1 annehmen kann. Wir gleichen die Trefferwahrscheinlichkeiten p mit den dazugehörenden Wahrscheinlichkeiten $p(X\leq 20)$ ab und erhalten die tabellarische Übersicht:

p =	**p(X≤20)** =
0	1
0.1	1
0.2	0.999679
0.3	0.952236
0.4	0.561035
0.5	0.101319
0.6	0.00336
0.7	0.000011
0.8	0
0.9	0
1	0

Wir haben damit: p = 0,6, d.h. sechs Segmenten des Glücksrads wird die Bezeichnung T für „Treffer“ zugeordnet.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1415