Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Poissonverteilung, Binomialverteilung

Aufgabe: Zwischen 8 Uhr (frühester Termin des Arbeitsbeginns) und 10 Uhr (spätester Termin des Arbeitsbeginns) betreten 24 Mitarbeiter ein Unternehmen. Wie groß sind unter der Voraussetzung einer Poissonverteilung die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse?

a) Innerhalb einer Minute betreten ein, zwei oder drei Mitarbeiter das Unternehmen.

b) Innerhalb einer Viertelstunde kommen vier Angestellte zur Arbeit.

c) Innerhalb der ersten Stunde beginnen weniger als 10 Mitarbeiter die Arbeit.

Betrachtet werden nun 5-Minuten-Intervalle bei den Ankunftszeiten. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von fünf Minuten drei Mitarbeiter das Unternehmen betreten, unter der Voraussetzung der Poisson- und der Binomialverteilung. Wie tragfähig ist die Berechnung nach der Poissonverteilung für das der Binomialverteilung zugrundeliegende Bernoulli-Experiment?

Lösung: I. Die nachfolgend eingeführte Zufallsvariable (Zufallsgröße) X ist poissonverteilt mit Parameter λ>0 und steht für diskrete, seltene, unabhängige Zufallsereignisse in einem kontinuierlichen Ereignisspektrum. Nach der Poissonverteilung mit Parameter λ errechnen sich die Wahrscheinlichkeiten als:

$$p(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

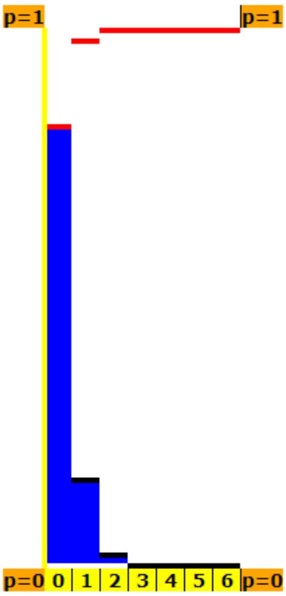
Die Verteilungsfunktion ist: $p(X \le k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}$. Für die Poissonverteilung folgt hinsichtlich Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung: $E(X)=\lambda$, $Var(X)=\lambda$, $\sigma=\sqrt{\lambda}$. Es gilt auf Grund der Diskretheit der Zufallsereignisse und mit der Verteilungsfunktion p(X≤k):

$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1).$$

II. a) X ist die Zufallsvariable, die die Anzahl der Mitarbeiter zählt, die innerhalb eines Zeitraums von einer Minute das Unternehmen betreten. Zunächst ist der Parameter λ der zugrundeliegenden Poissonverteilung zu bestimmen. In zwei Stunden haben 24 Mitarbeiter Zugang zum Unternehmen, was bei 2 Stunden = 120 Minuten eine durchschnittliche Ankunftsrate (Ereignisrate) von λ = 24/120 = 0,2 Mitarbeitern pro Minute ergibt. Es gilt die tabellarische Übersicht:

Parameter λ = 0.2 als erwartete Ereignishäufigkeit, Zufallsvariable X als bestimmte Anzahl k des Auftretens eines Ereignisses E mit p(X=k), p(X≤k) (kumuliert [Verteilungsfunktion]), Erwartungswert μ, Standardabweichung σ

P(0.2)		
k =	p(X=k) =	p(x≤k) =
0	0.818731	0.818731
1	0.163746	0.982477
2	0.016375	0.998852
3	0.001092	0.999943
4	0.000055	0.999998
5	0.000002	1
6	0	1
P(0.2)		
μ = 0.2		
σ = 0.447		



Der Tabelle wird entnommen: P(X=1) = 0,163746, P(X=2) = 0,016375, P(X=3) = 0,001092, so dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit sich errechnet als:

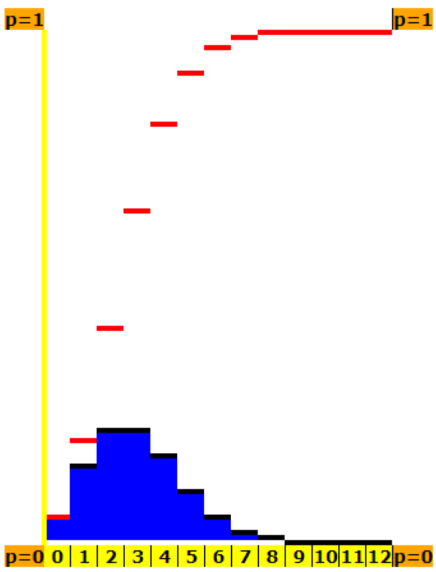
P(1≤X≤3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,163746 + 0,016375 + 0,001092 = 0,181213.

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen einem und drei Mitarbeitern das Unternehmen innerhalb einer Minute betreten, beträgt damit rund 18,1 %.

b) X ist die Zufallsvariable, die die Anzahl der Mitarbeiter zählt, die innerhalb eines Zeitraums von einer Viertelstunde das Unternehmen betreten. Der zugehörige Parameter λ bestimmt sich mit 2 Stunden = 8 Viertelstunden als: λ = 24/8 = 3 Mitarbeitern pro Viertelstunde. Es gilt die tabellarische Übersicht:

Parameter λ = 3 als erwartete Ereignishäufigkeit, Zufallsvariable X als bestimmte Anzahl k des Auftretens eines Ereignisses E mit p(X=k), p(X≤k) (kumuliert [Verteilungsfunktion]), Erwartungswert μ, Standardabweichung σ

P(3)		
k =	p(X=k) =	p(x≤k) =
0	0.049787	0.049787
1	0.149361	0.199148
2	0.224042	0.42319
3	0.224042	0.647232
4	0.168031	0.815263
5	0.100819	0.916082
6	0.050409	0.966491
7	0.021604	0.988095
8	0.008102	0.996197
9	0.002701	0.998898
10	0.00081	0.999708
11	0.000221	0.999929
12	0.000055	0.999984
P(3)		
μ = 3		
σ = 1.732		

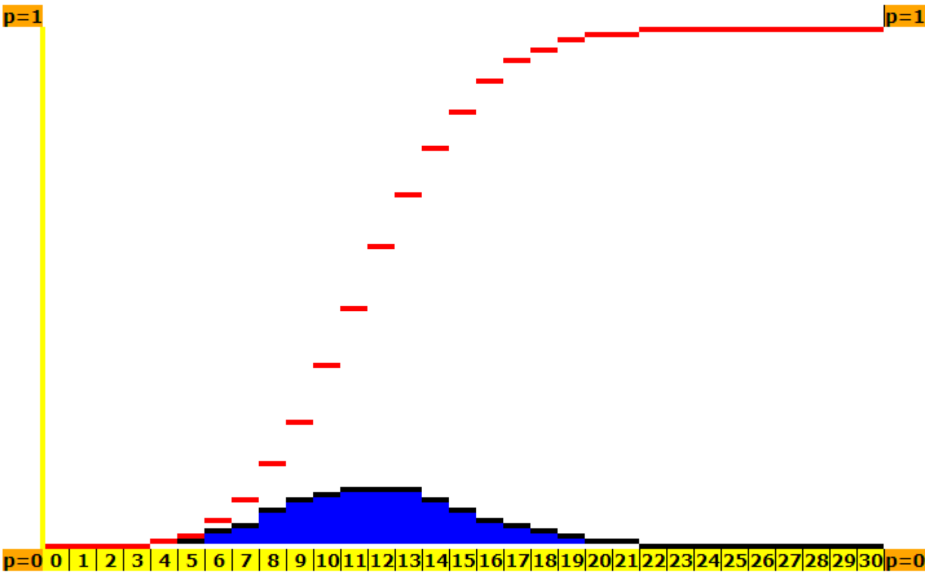


Der Tabelle entnehmen wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

P(X=4) = 0,168031 ≈ 16,8 %.

c) X ist die Zufallsvariable, die die Anzahl der Mitarbeiter zählt, die innerhalb eines Zeitraums von einer Stunde das Unternehmen betreten. Der Parameter λ ist: λ = 24/2 = 12 Mitarbeiter pro Stunde, die tabellarische Übersicht ergibt:

Parameter λ = 12 als erwartete Ereignishäufigkeit, Zufallsvariable X als bestimmte Anzahl k des Auftretens eines Ereignisses E mit p(X=k), p(X≤k) (kumuliert [Verteilungsfunktion]), Erwartungswert μ, Standardabweichung σ



P(12)		
k =	**p(X=k) =**	**p(x≤k) =**
0	0.000006	0.000006
1	0.000074	0.00008
2	0.000442	0.000522
3	0.00177	0.002292
4	0.005309	0.0076
5	0.012741	0.020341
6	0.025481	0.045822
7	0.043682	0.089504
8	0.065523	0.155028
9	0.087364	0.242392
10	0.104837	0.347229
11	0.114368	0.461597
12	0.114368	0.575965
13	0.10557	0.681536
14	0.090489	0.772025
15	0.072391	0.844416
16	0.054293	0.898709
17	0.038325	0.937034
18	0.02555	0.962584
19	0.016137	0.97872
20	0.009682	0.988402
21	0.005533	0.993935
22	0.003018	0.996953
23	0.001574	0.998527
24	0.000787	0.999314
25	0.000378	0.999692
26	0.000174	0.999867
27	0.000078	0.999944
28	0.000033	0.999977
29	0.000014	0.999991
30	0.000005	0.999997
P(12)		
μ = 12		
σ = 3.464		

Der Tabelle mit der Verteilungsfunktion entnehmen wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

P(X<10) = P(X≤9) = 0,242392 ≈ 24,2 %.

III. Allgemein ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Poisson- und Binomialverteilung, wenn die Poissonverteilung den Parameter λ besitzt und ein Bernoulli-Experiment n-mal durchgeführt mit

Trefferwahrscheinlichkeit p = λ/n. Unter bestimmten Voraussetzungen (hinreichend großes n, kleines p) kann dann mittels Poissonapproximation die Bernoulli- durch die Poisson-Wahrscheinlichkeit angenähert werden, d.h. es gilt:

$$p_\lambda(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \approx \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = p_{n,p}(Y=k),\ k = 0, 1, 2, \ldots n,\ p = \lambda/n$$

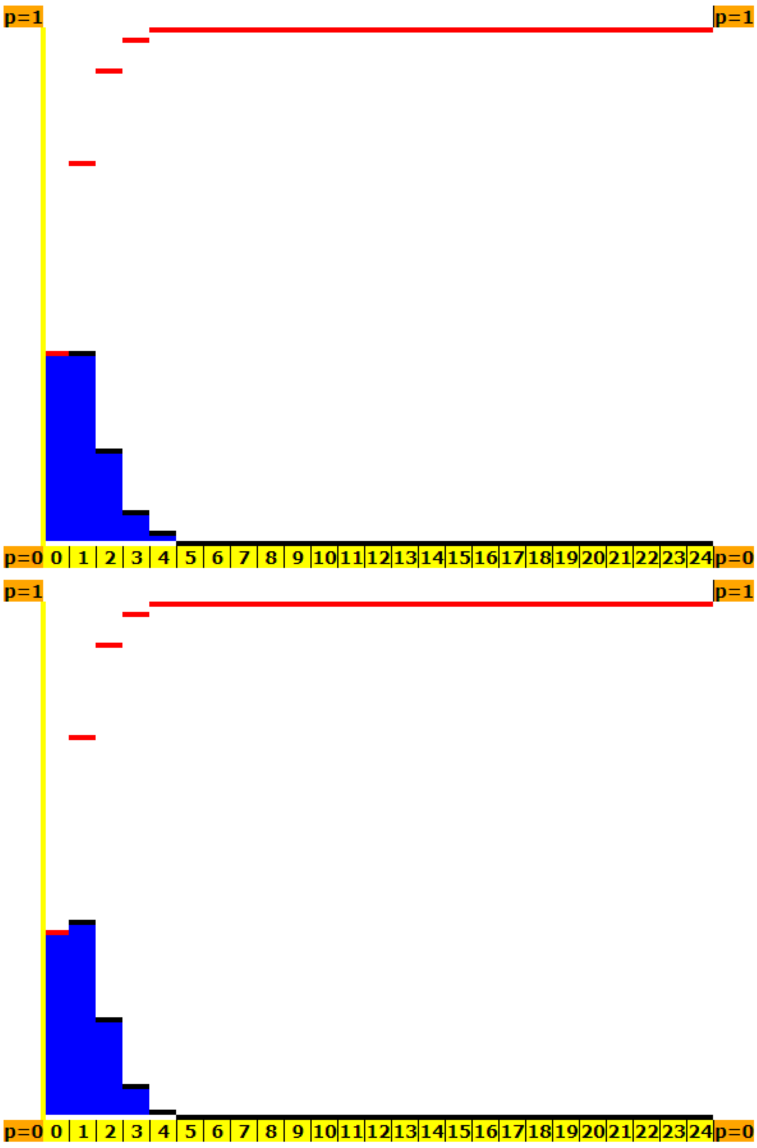
mit den poisson- bzw. binomialverteilten Zufallsvariablen X, Y.

IV. X ist die poissonverteilte Zufallsvariable, die die Anzahl der Mitarbeiter zählt, die innerhalb eines Zeitraums von fünf Minuten das Unternehmen betreten, mit Ereignisrate λ = 24/24 = 1 bei 24 5-Minuten-Zeiträumen in 2 Stunden. Y heißt die binomialverteilte Zufallsvariable, die die Anzahl der Mitarbeiter zählt, die innerhalb eines Zeitraums von fünf Minuten das Unternehmen betreten, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Mitarbeiters p = λ/n = 1/24 beträgt. Wir berechnen nun für drei ankommende Mitarbeiter die Wahrscheinlichkeiten:

Poissonverteilung: $p_1(X=3) = \frac{1^3}{3!}\cdot e^{-1} = 0{,}061313$

Binomialverteilung: $p_{24;1/24}(Y=3) = \binom{24}{3}\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^3\left(\frac{23}{24}\right)^{21} = 0{,}059900$.

Beide Wahrscheinlichkeitswerte liegen bei rund 6 %, so dass eine hinreichend gute Näherung zwischen Poisson- und Binomialverteilung besteht, auch gemäß der hier aufgeführten Verteilungen:



Poissonverteilung P(1), Binomialverteilung B(24; 1/24)

www.michael-buhlmann.de / 05.2023 / Aufgabe 1872