Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Binomialverteilung

Aufgabe: Eine Schulklasse besteht aus 25 Schülerinnen und Schülern. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein*e Schüler*in der Klasse eine Brille trägt, ist 30 % groß. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf Schüler*innen eine Brille tragen, wie hoch die, dass mehr als fünf Schüler*innen eine Brille tragen? Bestimme noch den Erwartungswert und die Standardabweichung der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Lösung: I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen". Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \text{ k = 0, 1, …n.}$$

mit $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot...\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten. Als Rechenregeln im Zusammenhang mit der Bernoulliformel ergeben sich:

$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1) = 1 - p(X\ge k)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\ge k+1) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1).$$

Für die B(n; p)-binomialverteilte Zufallsvariable X gilt noch hinsichtlich Erwartungswert μ und Standardabweichung σ:

$$\mu = np$$
$$\sigma=\sqrt{np(1-p)}\ .$$

n = 25	B(25,0.3)	p = 0.3
k =	p(X=k) =	p(x≤k) =
0	0.000134	0.000134
1	0.001437	0.001571
2	0.00739	0.008961
3	0.02428	0.033241
4	0.057231	0.090472
5	0.103017	0.193488
6	0.147166	0.340655
7	0.171194	0.511849
8	0.16508	0.676928
9	0.133636	0.810564
10	0.091636	0.9022
11	0.053554	0.955754
12	0.026777	0.98253
13	0.011476	0.994006
14	0.004216	0.998222
15	0.001325	0.999546
16	0.000355	0.999901
17	0.000081	0.999982
18	0.000015	0.999997
19	0.000002	1
20	0	1
21	0	1
22	0	1
23	0	1
24	0	1
25	0	1

II. Es liegt ein Bernoulli-Experiment vor. Für die zugrunde liegende binomialverteilte Zufallsvariable X ergibt sich als Anzahl der Versuchswiederholungen n = 28, die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt p = 0,3. Die zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten sind der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen. Und zwar gilt:

p(X=5) = 0,103017

und:

p(X>5) = 1 – p(X≤5) = 1 – 0,193488 = 0,806512.

Die gesuchten Wahrscheinlichkeit betragen 10,3 % bzw. 80,7 %.

III. Für die binomialverteilte Zufallsvariable X errechnen sich Erwartungswert und Standardabweichung als:

$\mu = np = 25 \cdot 0{,}3 = 7{,}5$ (als Durchschnittswert für die Schüler*innen mit Brille)

$\sigma = \sqrt{25 \cdot 0{,}3 \cdot (1-0{,}3)} = \sqrt{25 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29$ (als Streuung).

www.michael-buhlmann.de / 06.2023 / Aufgabe 1881