Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Vierfeldertafel

Aufgabe: Ein technisches Gerät besteht aus den Komponenten A und B; das Funktionieren beider Komponenten ist für das Funktionieren des Geräts unabdingbar. Komponente A ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 Prozent defekt, Komponente B mit einer von 2 Prozent; das Gerät ist funktionsuntüchtig mit einer Wahrscheinlichkeit von 6 Prozent.

a) Erstelle zur Funktionstüchtigkeit (A, B) bzw. -untüchtigkeit (A^-, B^-) der Komponenten eine Vierfeldertafel.

b) Weise nach, dass die Defekte der Komponenten A und B nicht stochastisch unabhängig sind.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E: Komponente A ist defekt, Komponente B nicht.
F: Komponente B ist defekt, wenn Komponente A defekt ist.
G: Komponente A ist in Ordnung, wenn Komponente B defekt ist.

d) Erstelle aus der Vierfeldertafel die zwei Wahrscheinlichkeitsbäume, wenn das Ereignis A (mit A^-) und wenn das Ereignis B (mit B^-) jeweils als Bedingung fungieren.

e) Das Gerät ist defekt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Defekt an der Komponente A bzw. der Komponente B liegt?

Lösung: I. Ist ein Zufallsexperiment gegeben und sind A, B Ereignisse innerhalb des Zufallsexperiments, so gilt der Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

(mit Oder-/Und-Beziehungen zwischen den Ereignissen als Mengen von Ergebnissen). Weiter gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit (Eintreten von Ereignis B unter der Bedingung A):

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

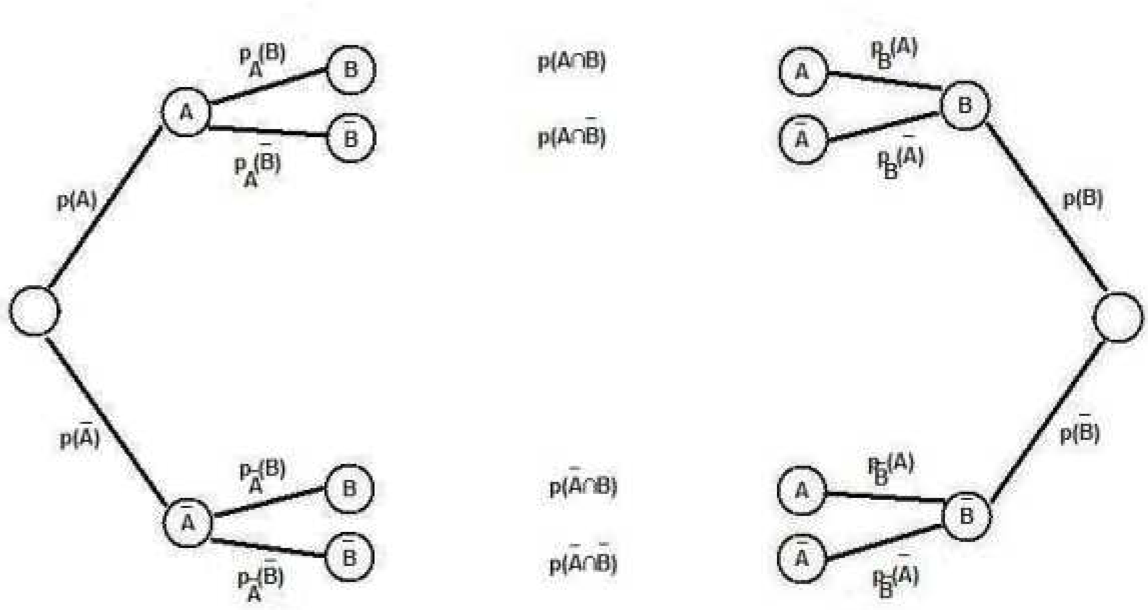
Die Ereignisse A, B sind stochastisch unabhängig, wenn die Aussagen:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p_A(B) \;\Leftrightarrow\; p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

erfüllt sind, sie sich stochastisch abhängig, wenn das Gegenteil gilt:

$$p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B).$$

II. Für zwei Ereignisse A, B und deren Gegenereignisse A^-, B^- innerhalb eines Zufallsexperiments ergeben sich die (zwei zueinander umgekehrten) Wahrscheinlichkeitsbäume:



Diese wiederum lassen sich in eine Vierfeldertafel einbinden:

	B	**B^-**	
A	$p(A\cap B)$	$p(A\cap B^-)$	$p(A)$
A^-	$p(A^-\cap B)$	$p(A^-\cap B^-)$	$p(A^-)$
	$p(B)$	$p(B^-)$	1

die auch auf absolute Häufigkeiten zu beziehen ist:

	B	**B^-**	
A	n_{11}	n_{12}	$n_A = n_{11}+n_{12}$
A^-	n_{21}	n_{22}	$n-n_A$
	$n_B = n_{11} + n_{21}$	$n-n_B$	n

oder um die bedingten Wahrscheinlichkeiten ergänzt werden kann:

	B	**B^-**				
A	$p(A\cap B)$	$p(A\cap B^-)$	$p(A)$	$p_A(B)$	$p_A(B^-)$	1
A^-	$p(A^-\cap B)$	$p(A^-\cap B^-)$	$p(A^-)$	$p_{A^-}(B)$	$p_{A^-}(B^-)$	1
	$p(B)$	$p(B^-)$	1			
	$p_B(A)$	$p_{B^-}(A)$				
	$p_B(A^-)$	$p_{B^-}(A^-)$				
	1	1				

In der Vierfeldertafel berechnen sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten nach folgendem Schema:

	B	**B^-**				
A	$p(A\cap B)$ $\boxed{:}$ $\boxed{:}$	$p(A\cap B^-)$ $\boxed{:}$ $\boxed{:}$	$p(A)$ $\boxed{=}$	$p_A(B) = p(A\cap B):p(A)$ $\boxed{+}$	$p_A(B^-) = p(A\cap B^-):p(A)$ $\boxed{=}$	1
A^-	$p(A^-\cap B)$ $\boxed{:}$ $\boxed{:}$	$p(A^-\cap B^-)$ $\boxed{:}$ $\boxed{:}$	$p(A^-)$ $\boxed{=}$	$p_{A^-}(B) = p(A^-\cap B):p(A^-)$ $\boxed{+}$	$p_{A^-}(B^-) = p(A^-\cap B^-): p(A^-)$ $\boxed{=}$	1
	$p(B)$ $\boxed{=}$	$p(B^-)$ $\boxed{=}$	1			
	$p_B(A) = p(A\cap B):p(B)$ $\boxed{+}$	$p_{B^-}(A) = p(A\cap B^-):p(B^-)$ $\boxed{+}$				
	$p_B(A^-) = p(A^-\cap B):p(B)$ $\boxed{=}$	$p_{B^-}(A^-) = p(A^-\cap B^-):p(B^-)$ $\boxed{=}$				
	1	1				

III. a) Bevor eine Vierfeldertafel erstellt werden kann, sind noch folgende Überlegungen durchzuführen: Das Gerät ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,06 defekt, wenn mindestens eine der Komponenten A oder B defekt ist. Nach dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten ist wegen $p(A^- \cup B^-)$ = 0,06, $p(A^-)$ = 0,05, $p(B^-)$ = 0,02:

$p(A^- \cup B^-) = p(A^-) + p(B^-) - p(A^- \cap B^-)$ ⇔ 0,06 = 0,05 + 0,02 – $p(A^- \cap B^-)$ ⇔
0,06 = 0,07 – $p(A^- \cap B^-)$ ⇔ $p(A^- \cap B^-) = 0{,}01$.

Zusammen mit $p(A \cap B)$ = 1-0,06 = 0,94 für die Funktionstüchtigkeit des Geräts bei $p(A) = 1 - p(A^-)$ = 1-0,05 = 0,95, $p(B) = 1 - p(B^-)$ = 1-0,02 = 0,98 ergibt sich damit die Vierfeldertafel:

Vierfeldertafel (Wahrscheinlichkeiten):

	B	B^-	
A	0.94	0.01	0.95
A^-	0.04	0.01	0.05
	0.98	0.02	1

Vierfeldertafel (Wahrscheinlichkeiten):

	B	B^-	
A	$p(A \cap B) = 0.94$	$p(A \cap B^-) = 0.01$	$p(A) = 0.95$
A^-	$p(A^- \cap B) = 0.04$	$p(A^- \cap B^-) = 0.01$	$p(A^-) = 0.05$
	$p(B) = 0.98$	$p(B^-) = 0.02$	1

Vierfeldertafel (Wahrscheinlichkeiten, bedingte Wahrscheinlichkeiten):

	B	B^-			
A	$p(A \cap B) = 0.94$	$p(A \cap B^-) = 0.01$	$p(A) = 0.95$	$p_A(B) = 0.9895$	$p_A(B^-) = 0.0105$
A^-	$p(A^- \cap B) = 0.04$	$p(A^- \cap B^-) = 0.01$	$p(A^-) = 0.05$	$p_{A^-}(B) = 0.8$	$p_{A^-}(B^-) = 0.2$
	$p(B) = 0.98$	$p(B^-) = 0.02$	1		
	$p_B(A) = 0.9592$	$p_{B^-}(A) = 0.5$			
	$p_B(A^-) = 0.0408$	$p_{B^-}(A^-) = 0.5$			

b) Wir überprüfen hinsichtlich der defekten Komponenten A, B die Aussage:

$p(A^- \cap B^-) \neq p(A^-) \cdot p(B^-)$

und haben wegen $p(A^- \cap B^-) = 0{,}01$, $p(A^-)$ = 0,05, $p(B^-)$ = 0,02 in der Tat:

0,01 ≠ 0,05·0,02 = 0,001;
Die Defekte treten also stochastisch abhängig auf.

c) Aus der Vierfeldertafel ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

p(E) = $p(A^- \cap B)$ = 0,01.

Als bedingte Wahrscheinlichkeiten errechnen sich:

p(F) = $p_{A^-}(B^-) = \dfrac{p(A^- \cap B^-)}{p(A^-)} = \dfrac{0{,}01}{0{,}05}$ = 0,2

p(G) = $p_{B^-}(A) = \dfrac{p(A \cap B^-)}{p(B^-)} = \dfrac{0{,}01}{0{,}02}$ = 0,5.

d) Mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten folgt aus der Vierfeldertafel hinsichtlich der beiden Wahrscheinlichkeitbäume:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Merkmale: A (Ausgänge A, A^-), B (Ausgänge B, B^-); zweistufig):

	A	B		Merkmale		
		0.9895 **B**	>	p(**A∩B**) =	0.94	**1**
	0.95 **A**					
		0.0105 **B^-**	>	p(**A∩B^-**) =	0.01	**2**
		0.8 **B**	>	p(**A^-∩B**) =	0.04	**3**
	0.05 **A^-**					
		0.2 **B^-**	>	p(**A^-∩B^-**) =	0.01	**4**
				Summe:	1	

Wahrscheinlichkeitsbaum (Merkmale: B (Ausgänge B, B^-), A (Ausgänge A, A^-); zweistufig):

	B	A		Merkmale		
		0.9592 **A**	>	p(**A∩B**) =	0.94	**1**
	0.98 **B**					
		0.0408 **A^-**	>	p(**A^-∩B**) =	0.04	**2**
		0.5 **A**	>	p(**A∩B^-**) =	0.01	**3**
	0.02 **B^-**					
		0.5 **A^-**	>	p(**A^-∩B^-**) =	0.01	**4**
				Summe:	1	

e) Es sind bedingte Wahrscheinlichkeiten auszurechnen. Die Bedingung, dass das Gerät defekt ist, ist das Ereignis $A^- \cup B^-$ mit $p(A^- \cup B^-)$ = 0,06 laut der Aufgabenstellung. Daraus folgt für das Ereignis, dass der Defekt des Gerätes durch die Komponente A verursacht wurde:

$$p_{A^- \cup B^-}(A^-) = \frac{p((A^- \cup B^-) \cap A^-)}{p(A^- \cup B^-)} = \frac{p(A^-)}{p(A^- \cup B^-)} = \frac{0{,}05}{0{,}06} = \frac{5}{6}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Defekt des Gerätes durch die Komponente B verursacht wurde, ist mithin:

$$p_{A^- \cup B^-}(B^-) = \frac{p((A^- \cup B^-) \cap B^-)}{p(A^- \cup B^-)} = \frac{p(B^-)}{p(A^- \cup B^-)} = \frac{0{,}02}{0{,}06} = \frac{1}{3}.$$

Dass die beiden errechneten Wahrscheinlichkeiten zusammen nicht 1 ergeben, erklärt sich aus der Tatsache, dass das Ereignis $A^- \cap B^-$ – beide Komponenten A und B sind defekt – die Wahrscheinlichkeit $p(A^- \cap B^-)$ = 0,01 besitzt; hier ergibt sich als bedingte Wahrscheinlichkeit $p_{A^- \cup B^-}(A^- \cap B^-) = \frac{1}{6}$, so dass gemäß dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ = 1 folgt.