

Mathematikaufgaben

> Statistik/Stochastik

> Binomialverteilung

Aufgabe: X ist eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 8$ (Anzahl der Versuche) und $p = 0,6$ (Trefferwahrscheinlichkeit). Erstelle zur Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeitsverteilung und ein dazu passendes Histogramm.

Lösung: I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen“. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist $B(n; p)$ -binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulli-formel:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten.

II. Wir berechnen für $k = 0, 1, 2, \dots, 8$ die Wahrscheinlichkeit $p(X=k)$. Z.B. ergibt sich nach der Bernoulliformel mit $k = 3$ als:

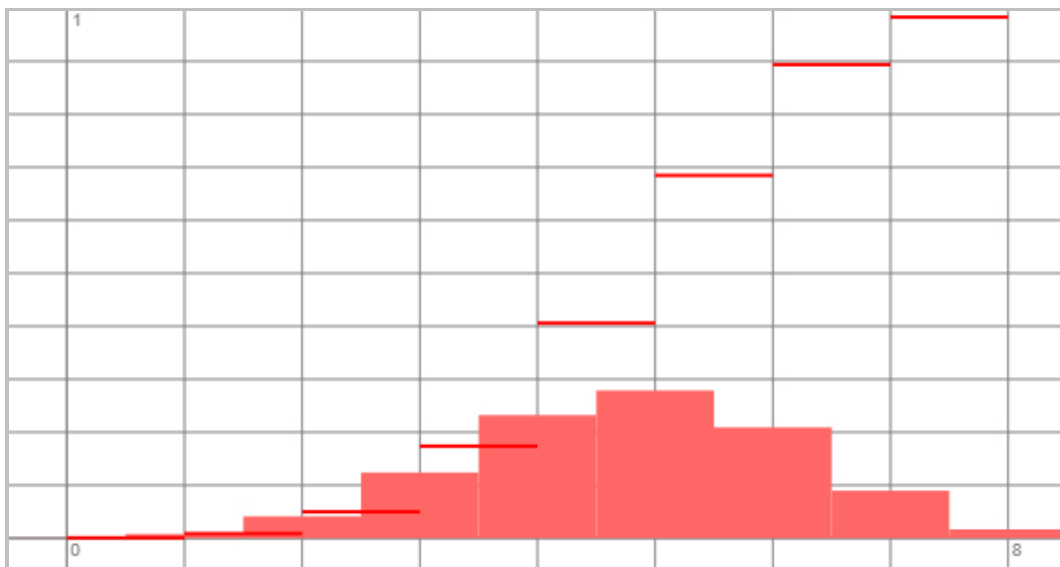
$$p(X=3) = \binom{8}{3} \cdot 0,6^3 \cdot (1-0,6)^{8-3} = \binom{8}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^5 = 56 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^5 = 0,123863$$

usw. Auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen Wahrscheinlichkeiten $p(X=0)$, $p(X=1)$, $p(X=2)$, ..., $p(X=8)$.

III. Es ergibt sich daraus die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung (einschließlich der kumulierten Wahrscheinlichkeiten):

x	$p(X=x)$	$p(X \leq x)$
0	0.000655	0.000655
1	0.007864	0.00852
2	0.041288	0.049807
3	0.123863	0.17367
4	0.232243	0.405914
5	0.278692	0.684605
6	0.209019	0.893624
7	0.08958	0.983204
8	0.016796	1

IV. Das zur Wahrscheinlichkeitsverteilung passende Histogramm stellt sich dar als:



www.michael-buhlmann.de / 05.2024 / Aufgabe 2104