

Mathematikaufgaben

> Statistik/Stochastik

> Einstufiges Zufallsexperiment

Aufgabe: Ein idealer Spielwürfel (mit den Zahlen/Augen 1 bis 6) wird einmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: Es wird die Zahl „6“ gewürfelt.

B: Es wird eine ungerade Zahl geworfen.

C: Es wird eine Zahl, die größer als 4 ist, geworfen.

D: Es wird eine Primzahl gewürfelt.

Lösung: I. Zufallsexperimente (Zufallsversuche, Zufallsvorgänge) sind mathematisch modellierte Prozesse. Sie lassen sich durch sog. Wahrscheinlichkeitsbäume (aus Knoten, Verzweigungen [Ausgänge, Merkmalsausprägungen], Kanten [Zweige] und Pfaden [Äste]) darstellen, die Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten anzeigen. Zufallsexperimente, die auf Ergebnisse mit immer derselben Wahrscheinlichkeit hinführen, heißen Laplace-Experimente. Ergebnisse gehören jeweils zu einem Pfad im Wahrscheinlichkeitsbaum, Ereignisse sind Zusammenfassungen von Ergebnissen, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses errechnet sich gemäß den Pfadregeln (Addition von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade bei einem einstufigen Zufallsversuch).

Bei einem Laplace-Experiment gilt hinsichtlich der Wahrscheinlichkeiten $p(E)$ eines Ereignisses E:

$$p(E) = \frac{n_E}{n}$$

mit n_E als Anzahl der zum Ereignis E gehörenden Ergebnisse und n als Anzahl aller Ergebnisse.

II. Wir stellen das einstufige Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar und bemerken, dass das Werfen mit einem idealen Würfel die ($n = 6$) Ergebnisse „1“, „2“, „3“, „4“, „5“, „6“ mit der jeweils gleichen Wahrscheinlichkeit $1/6$ ergibt. Es liegt damit ein Laplace-Experiment vor. Es gilt:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: 1, 2, 3, 4, 5, 6; einmalige Durchführung):

1	Versuchsdurchführung					
1/6	1	>	p(1) =	0.1666666666666666	1	◀
1/6	2	>	p(2) =	0.1666666666666666	2	◀
1/6	3	>	p(3) =	0.1666666666666666	3	◀ ◀
1/6	4	>	p(4) =	0.1666666666666666	4	
1/6	5	>	p(5) =	0.1666666666666666	5	◀ ◀ ◀
1/6	6	>	p(6) =	0.1666666666666666	6	◀ ◀
	Summe:	1			Auswertung:	Ereignis A Ereignis B Ereignis C Ereignis D

Gemäß dem Wahrscheinlichkeitsbaum und der dazugehörigen Auswertung der in der Aufgabenstellung angeführten Ereignisse A, B, C, D ergibt sich:

Ereignis A (Es wird die Zahl „6“ gewürfelt.): Enthält einzig das Ergebnis „6“, die Wahrscheinlichkeit beträgt wegen $n_A = 1$, $n = 6$ damit: $p(A) = \frac{1}{6} = 0,16666666 \approx 16,7\%$.

Ereignis B (Es wird eine ungerade Zahl geworfen.): Enthält die drei Ergebnisse „1“, „3“, „5“, die Wahrscheinlichkeit beträgt wegen $n_B = 3$, $n = 6$ damit: $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50,0\%$.

Ereignis C (Es wird eine Zahl, die größer als 4 ist, geworfen.): Enthält die drei Ergebnisse „5“, „6“, die Wahrscheinlichkeit beträgt wegen $n_C = 2$, $n = 6$ damit: $p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33333333 \approx 33,3\%$.

Ereignis D (Es wird eine Primzahl gewürfelt.): Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Das Ereignis D enthält damit die drei Ergebnisse „2“, „3“, „5“, die Wahrscheinlichkeit beträgt wegen $n_D = 3$, $n = 6$ damit: $p(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50,0\%$.