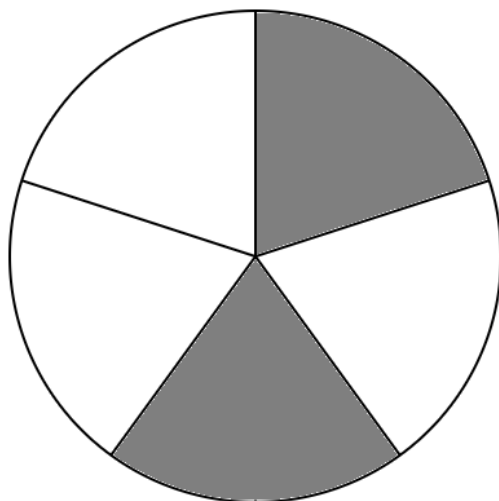


Mathematikaufgaben

> Statistik/Stochastik

> Zweistufiges Zufallsexperiment, Erwartungswert

Aufgabe: Das nachstehende Glücksrad ist in fünf gleich große Segmente der Farben weiß und grau unterteilt.



Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Mit dem Drehen des Glücksrads ist ein Spiel verbunden. Der Spieler zahlt dabei einen Einsatz von € 1,-. Zudem gilt der nachstehende Auszahlungsplan:

	zweimal grau	einmal grau	sonst
Auszahlung	€ 2,-	€ 1,-	€ 0,-

Berechne den Erwartungswert des Spiels.

Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair wird?

Berechne bei einem Einsatz von € 1,- die Auszahlung für „zweimal grau“, damit das Spiel fair ist.

Lösung: I. Zufallsexperimente (Zufallsversuche, Zufallsvorgänge) sind mathematisch modellierte Prozesse. Sie lassen sich durch sog. Wahrscheinlichkeitsbäume (aus Knoten, Verzweigungen [Ausgänge, Merkmalsausprägungen], Kanten [Zweige] und Pfaden [Äste]) darstellen, die Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten anzeigen. Ergebnisse gehören jeweils zu einem Pfad im Wahrscheinlichkeitsbaum, Ereignisse sind Zusammenfassungen/Mengen von Ergebnissen, Ergebnisse und Ereignisse können in der Mengenschreibweise als Teilmenge der Grundmenge aller Ergebnisse dargestellt werden, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses errechnet sich gemäß den Pfadregeln (Addition von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade, Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades).

Bewertet man Ereignisse etwa in einem Glücksspiel als Zufallsexperiment mit Geld, so ergibt sich die Situation des Erwartungswertes. Ein Zufallsexperiment ist ein Spiel, wenn im Experiment auftretende Ereignisse A, B, \dots mit positiven (Gewinn) oder negativen (Verlust) Geldeinheiten (GE) g_A, g_B, \dots bewertet werden oder wenn Gewinnpositionen ein Spieleinsatz e (GE) gegenübersteht. Die Ereignisse haben die Wahrscheinlichkeiten $p(A), p(B), \dots$, die Wahrscheinlichkeiten der sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse entsprechen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $p(A) + p(B) + \dots + p(\text{sonst}) = 1$. Der Erwartungswert E gibt den durchschnittlichen Gewinn oder Verlust pro Spiel an (GE), d.h. es gilt:

$$E = g_A p(A) + g_B p(B) + \dots$$

bzw.

$$E = g_A p(A) + g_B p(B) + \dots - e.$$

D.h.: Der Erwartungswert ist die Summe aller Produkte, die sich aus dem Gewinn oder Verlust und der Wahrscheinlichkeit jeweils eines Ereignisses ergeben, eventuell abzüglich des Spieleinsatzes. Ein Spiel heißt im Übrigen fair, wenn der Erwartungswert E gleich Null ist.

II. Der zweistufige Wahrscheinlichkeitsbaum zum Glücksrad stellt sich dar als:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: grau, weiß; 2-maliges Drehen):

1.	2.	Versuchsdurchführung(en)				
	2/5 grau	>	p(grau; grau) = 0,16	1	◀	
	2/5 grau					
	3/5 weiß	>	p(grau; weiß) = 0,24	2	◀	
	2/5 grau	>	p(weiß; grau) = 0,24	3	◀	
	3/5 weiß					
	3/5 weiß	>	p(weiß; weiß) = 0,36	4	◀	
	Summe:		1		Auswertung:	Ereignis „zweimal grau“ Ereignis „einmal grau“ Ereignis „sonst“

Die Grundmenge aller Ergebnisse ist {gg, gw, wg, ww}, die Ereignisse sind „zweimal grau“ (gg), „einmal grau“ (gw, wg), „sonst“ (ww) mit den Wahrscheinlichkeiten (gemäß den Pfadregeln für Zufallsexperimente):

Ereignis „zweimal grau“: $p(\text{„zweimal grau“}) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$

Ereignis „einmal grau“: $p(\text{„einmal grau“}) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$

Ereignis „sonst“: $p(\text{„sonst“}) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$.

III. Es ergibt sich der als um die Wahrscheinlichkeiten erweiterte Auszahlungsplan:

			Einsatz: € 1,-
	zweimal grau	einmal grau	sonst
Ereignis	gg	gw, wg	ww
Auszahlung	€ 2,-	€ 1,-	€ 0,-
Wahrscheinlichkeit	0,16	0,48	0,36

Aus dem erweiterten Auszahlungsplan errechnet sich der Erwartungswert E des Spiels als Summe der Produkte aus Auszahlung und Wahrscheinlichkeit vermindert um den Einsatz:

$$E = 2 \cdot 0,16 + 1 \cdot 0,48 + 0 \cdot 0,36 - 1 = 0,32 + 0,48 - 1 = -0,20 \text{ €}.$$

Das Spiel ist also nicht fair, der Spieler verliert im Durchschnitt pro Spiel € 0,20.

IV. Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert $E = 0$ ist. Unter der Bedingung, dass das Spiel fair ist, wird der zu ermittelnde Einsatz als x bezeichnet. Es gilt:

$$E = 2 \cdot 0,16 + 1 \cdot 0,48 + 0 \cdot 0,36 - x = 0 \Leftrightarrow 0,32 + 0,48 - x = 0 \Leftrightarrow 0,8 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0,80 \text{ €}.$$

Der Einsatz muss bei einem fairen Spiel also € 0,80 betragen (und damit um € 0,20 geringer als der ursprüngliche Einsatz von € 1,-).

V. Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert $E = 0$ ist. Unter der Bedingung, dass das Spiel fair ist, wird die zu ermittelnde Auszahlung für „zweimal grau“ als x bezeichnet. Es gilt:

$$E = x \cdot 0,16 + 1 \cdot 0,48 + 0 \cdot 0,36 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0,16x - 0,52 = 0 \Leftrightarrow 0,16x = 0,52 \Leftrightarrow x = 3,25 \text{ €}.$$

Auszahlung für „zweimal grau“ erhöht sich also bei einem fairen Spiel auf € 3,25 (und damit um € 1,25 gegenüber der Auszahlung von € 2,- in der ursprünglichen Spielsituation).