Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Zu bestimmen ist eine Stammfunktion F(x) zur Funktion:

$$f(x) = x^2 \cdot e^x.$$

Lösung: I. Wir verwenden die Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx, \ \int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$$

Dabei ergeben sich folgende Vorgehensweisen je nach vorgegebenem Produkt im Integranden:

a) Produkt = Polynom * Exponentialfunktion: Wähle als u'(x) die Exponentialfunktion, als v(x) das Polynom n. Grades. Nach n-maliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.
b) Produkt = Polynom * Sinus-/Kosinusfunktion: Wähle als u'(x) die Sinus-/Kosinusfunktion, als v(x) das Polynom n. Grades. Nach n-maliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.
c) Produkt = Polynom * natürlicher Logarithmus: Wähle als u'(x) das Polynom n. Grades und v(x) = ln(x). Nach einmaliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.
d) Produkt = Sinus-/Kosinusfunktion * Sinus-/Kosinusfunktion: Die Wahl von u'(x) und v(x) ist beliebig. Die Integration führt dadurch, dass sich Sinus- und Kosinusfunktionen beim Ab- und Aufleiten wiederholen, wieder auf das anfängliche Integral, so dass die Integration als Gleichung aufgefasst werden kann, die nach dem zu lösenden Integral umgeformt werden kann.
e) Produkt = Exponentialfunktion * Sinus-/Kosinusfunktion: Die Wahl von u'(x) und v(x) ist beliebig. Die Integration führt dadurch, dass sich Sinus- und Kosinusfunktionen beim Ab- und Aufleiten wiederholen, wieder auf das anfängliche Integral, so dass die Integration als Gleichung aufgefasst werden kann, die nach dem zu lösenden Integral umgeformt werden kann.

II. Da nur eine Stammfunktion zu bestimmen ist, sei im Folgenden die beim Aufleiten auftretende Integrationskonstante C = 0. Die Produktintegration ist wegen des Faktors x^2 im Integranden zweimal anzuwenden. Aus:

u(x) = x^2, u'(x) = 2x
v'(x) = e^x, v(x) = e^x

folgt mit dem ersten Anwenden der partiellen Integration:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = (*).$$

Das Integral $\int xe^x dx$ ist wieder mit der Produktintegration zu bearbeiten:

u(x) = x, u'(x) = 1
v'(x) = e^x, v(x) = e^x

Es geht weiter:

$$(*) = x^2 e^x - 2[xe^x - \int 1 \cdot e^x dx] = x^2 e^x - 2[xe^x - e^x] = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x,$$

u.a. durch Ausklammern von e^x im Term der Stammfunktion. Die gesuchte Stammfunktion lautet damit: F(x) = $(x^2 - 2x + 2)e^x$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2015 / Aufgabe 153