Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne die Aufleitung der Tangensfunktion f(x) = tan(x).

Lösung: I. Zur Berechnung der Aufleitung der Tangensfunktion beachten wir, dass tan(x) = sin(x)/cos(x) gilt. Wir verwenden also für das Integrieren die Substitutionsregel (als Umkehrung der Kettenregel für das Ableiten):

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) = F(g(x))$ mit: u = g(x), $u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'(x)dx = du$.

D.h.: Eine Substitution ist möglich, wenn die Ableitung eines „inneren“ Terms des Integranden als (bis auf eine multiplikative Konstante bestimmter) Faktor im Integral vorhanden ist. Weiter benutzen wir die Potenzregel für den Fall n = -1:

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ (n ≠ -1), $\int x^{-1} dx = \ln|x|$.

Substitutions- und Potenzregel gehen dann in diesem Fall die bekannte Regel ein bzgl. der Aufleitung eines Bruchs bestehend aus Nennerfunktion f(x) und Zählerableitung f'(x):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|.$$

II. Wir führen die Integration gemäß der Substitutionsregel mit u(x) = cos(x), u'(x) = -sin(x), -du = sin(x)dx durch und erhalten:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| = -\ln|\cos x| .$$

Das unbestimmte Integral lautet damit: $\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$ + C mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 12.2015 / Aufgabe 165