Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt\ .$$

Lösung: I. Das unbestimmte Integral lässt sich letztlich durch eine geeignete Substitution gemäß der Substitutionsregel:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) = F(g(x)) \text{ mit: u = g(x), } u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'(x)dx = du$$

lösen.

II. Zur Ermittlung des unbestimmten Integrals $\int \sqrt{1+t^2}\,dt$ substituieren wir mit t = sinh(u) und dt = cosh(u)du und erhalten:

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \int \sqrt{1+\sinh^2 u}\cdot \cosh u\,du = \int \cosh u \cdot \cosh u\,du = \int \cosh^2 u\,du = (*)$$

auf Grund der Identität: $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \Leftrightarrow \cosh^2 u = 1+\sinh^2 u$. Wir rechnen weiter mit:

$$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2} \Rightarrow \cosh^2 u = \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2u}+2+e^{-2u}\right)$$

und erhalten:

$$(*) = \int \frac{1}{4}\left(e^{2u}+2+e^{-2u}\right)du = \frac{1}{4}\int\left(e^{2u}+2+e^{-2u}\right)du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u}\right) = \frac{1}{2}u+\frac{1}{8}\left(e^{2u}-e^{-2u}\right) =$$

$$\frac{1}{2}u+\frac{1}{8}\left(e^u-e^{-u}\right)\left(e^u+e^{-u}\right) = \frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right) = \frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\sinh u\cdot\cosh u = (**)$$

u.a. mit Hilfe der 3. binomischen Formel. Rücksubstitution mit sinh(u) = t, u = arsinh(t) und $\cosh^2(u) = 1+\sinh^2(u) = 1+t^2 \Rightarrow \cosh(u) = \sqrt{1+t^2}$ führt auf:

$$(**) = \frac{1}{2}ar\sinh t+\frac{1}{2}t\cdot\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2}\left(t\cdot\sqrt{1+t^2}+ar\sinh t\right) = \frac{1}{2}\left(t\cdot\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)$$

wegen der Identität: arsinh(t) = $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$. Insgesamt ergibt sich – unter Berücksichtigung der Integrationskonstante C – für das gesuchte unbestimmte Integral:

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\cdot\sqrt{1+t^2}+ar\sinh t\right)+C = \frac{1}{2}\left(t\cdot\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)+C\ .$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 294