Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne eine Stammfunktion F(x) der Funktion

f(x) = $\arctan x$.

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals (als Gesamtheit aller Stammfunktionen) verwenden wir die Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx\,,\ \int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

II. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u))\cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|.$$

III. Wir führen Integration von f(x) = $\arctan x$ mit Hilfe der partiellen Integration und der Substitution durch. Es gilt nicht zuletzt auf Grund der Ableitung: f'(x) = $\frac{1}{x^2+1}$:

$$\int \arctan x dx = \int 1\cdot \arctan x dx \underset{\left\{\substack{u'=1, v=\arctan x \\ u=x, v'=\frac{1}{x^2+1}}\right\}}{=} x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$x\arctan x - \int\frac{x}{x^2+1}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx \underset{\left\{\substack{u=x^2+1 \\ du=2xdx}\right\}}{=}$$

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|u| \underset{x^2+1=u}{=} x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Eine gesuchte Stammfunktion lautet damit:

F(x) = $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1270