Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \ln^2 x dx.$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals (als Gesamtheit aller Stammfunktionen) verwenden wir die Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx, \quad \int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

II. Wir führen Integration mit Hilfe der partiellen Integration durch. Es gilt nicht zuletzt auf Grund der Ableitung des natürlichen Logarithmus $(\ln x)' = \frac{1}{x}$:

$$\int \ln^2 x dx = \int 1\cdot \ln^2 x dx \underset{\left\{\substack{u'(x)=1, u(x)=x \\ v(x)=\ln^2 x, v'(x)=\frac{2}{x}\ln x}\right\}}{=} x\ln^2 x - \int x\cdot \frac{2}{x}\ln x dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x dx =$$

$$x\ln^2 x - \int 2\ln x dx \underset{\left\{\substack{u'(x)=2, u(x)=2x \\ v(x)=\ln x, v'(x)=\frac{1}{x}}\right\}}{=} x\ln^2 x - \left(2x\ln x - \int 2x\cdot \frac{1}{x}dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2dx =$$

$$x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2).$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$\int \ln^2 x dx = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$ mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1296