Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx .$$

1. Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|.$$

II. Wir führen die Integration mit Hilfe einer trigonometrischen Substitution durch. Es gilt dabei:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\frac{1}{2}dx \underset{\left\{\begin{matrix}\frac{x}{2}=\sin u \\ \frac{1}{2}dx=\cos u du\end{matrix}\right\}}{=}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sin u)^2}}\cos u du = \int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}du \underset{\{\sin^2 u+\cos^2 u=1\}}{=} \int \frac{\cos u}{\sqrt{\cos^2 u}}du = \int \frac{\cos u}{\cos u}du =$$

$$\int 1du = u \underset{\left\{\frac{x}{2}=\sin u \Rightarrow u=\arcsin(\frac{x}{2})\right\}}{=} \arcsin(\frac{x}{2}).$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{2}) + C$$ mit C als Integrationskonstante.

2. Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$.

II. Es folgt mit Substitution und der Ableitung des Arkussinus f(x) = arcsin(x) als: f'(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ die nachstehende Integration:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \frac{1}{2} dx \underset{\left\{\begin{smallmatrix} \frac{x}{2}=u \\ \frac{1}{2}dx=du \end{smallmatrix}\right\}}{=}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u \underset{\left\{u=\frac{x}{2}\right\}}{=} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Das <u>unbestimmte Integral</u> lautet damit:

$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$ mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1297