Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \tan x \cdot \ln|\cos x| dx .$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| .$$

II. Mit f(x) = $\ln|\cos x|$ ergibt sich die 1. Ableitung: f'(x) = $\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$ u.a. nach der Kettenregel. Wir führen daher die Integration mit Hilfe einer Substitution wie folgt durch:

$$\int \tan x \cdot \ln|\cos x| dx = -\int \ln|\cos x| \cdot (-\tan x)dx \underset{\left\{\begin{matrix} u=\ln|\cos x| \\ du=-\tan x dx \end{matrix}\right\}}{=} -\int u du = -\frac{1}{2}u^2 \underset{\{\ln|\cos x|=u\}}{=}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\ln|\cos x|\right)^2 = -\frac{1}{2}\ln^2|\cos x| .$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \tan x \cdot \ln|\cos x| dx = -\frac{1}{2}\ln^2|\cos x| + C$$ mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1301