Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \cos^{2n+1} x dx \text{ , } n\varepsilon\mathbf{N_0}.$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx.

II. Es gilt der binomische Lehrsatz:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n \text{ (a, b reell).}$$

III. Wir führen die Integration mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, einer Substitution sowie des binomischen Lehrsatzes wie folgt durch:

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int \cos x \cdot \cos^{2n} x dx = \int \cos x \cdot \left(\cos^2 x\right)^n dx = \int \cos x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)^n dx =$$

$$\int \left(1-\sin^2 x\right)^n \cos x dx \underset{\left\{\substack{u=\sin x \\ du=\cos x dx}\right\}}{=} \int \left(1-u^2\right)^n du = \int \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-u^2)^i \cdot 1^{n-i} du = \int \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-u^2)^i du =$$

$$\int \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u^{2i} du = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{u^{2i+1}}{2i+1} \underset{\{\sin x = u\}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{\sin^{2i+1} x}{2i+1}.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{\sin^{2i+1} x}{2i+1} + C \text{ mit C als Integrationskonstante.}$$

IV. Für die ersten natürlichen Zahlen einschließlich 0 ergeben sich die nachstehenden Formeln:

n=	Integral
0	$\int \cos x dx = \sin x$
1	$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$
2	$\int \cos^5 x dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$
3	$\int \cos^7 x dx = \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x$
4	$\int \cos^9 x dx = \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{6}{5}\sin^5 x - \frac{4}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x$
	usw.

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1307