

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x+5}{x^2+1} dx.$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u) du$$

mit: $x = g(u)$, $du = g'(u)du$ bzw.:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

mit: $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|.$$

Weiterhin gibt es noch das Grundintegral:

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x.$$

II. Wir führen die Integration durch mit Hilfe der sich aus der Substitutionsregel ergebenden

Beziehung: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$ und unter Verwendung des arctan-Grundintegrals:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{5}{x^2+1} dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u(x)=x^2+1 \\ u'(x)=2x \end{array} \right\}}{=} \ln(x^2+1) + 5 \arctan x.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + 5 \arctan x + C \text{ mit } C \text{ als Integrationskonstante.}$$