Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx .$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + ... + c_0}{a(x - x_1)^n \cdot ... \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^o \cdot ...} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x - x_1} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} + ... + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + ... + \frac{B_{o_1} x + C_{o_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1}} + ...\right] \text{ (*)},$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x - a} dx = \ln|x - a| , \int \frac{1}{(x - a)^n} dx = -\frac{1}{(n - 1)(x - a)^{n-1}} \text{ (n > 1)},$$

schließlich nach Regeln für quadratische Faktoren, u.a.:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \text{ (gemäß der Substitutionsregel)},$$

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{1}{x^2 + 1} \text{ (gemäß der Substitutionsregel)},$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x \text{ (als Grundintegral)},$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x\right) \text{ (gemäß der Produktregel)}.$$

II. Wir führen die Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung durch und haben für den Integranden $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$ den Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \text{ (**)}.$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $(x^2 + 1)^2$ des Integranden ergibt:

$$x^2 - x - 2 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D =$$
$$Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D \quad (***)$$

Die Gleichung (***) liefert auf Grund von

$$Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D = 0x^3 + 1x^2 - 1x - 2$$

mit Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem:

A = 0
B = 1
A+C = -1
B+D = -2.

Mit A = 0, B = 1 folgt: 0+C = -1 ⬄ C = -1, 1+D = -2 ⬄ D = -3. Es gilt also die Identität:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-x-3}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x+3}{(x^2+1)^2} \quad (****).$$

III. Integration ergibt gemäß (****):

$$\int \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x+3}{(x^2+1)^2} \right) dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x+3}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{3}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{3}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$\arctan x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right) = \frac{1-3x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \frac{1-3x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctan x + C$$ mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1371