Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{8}{x^3 - x} dx .$$

1. Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + ... + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot ... \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^o \cdot ...} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + ... + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + ... + \frac{B_{o_1} x + C_{o_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1}} + ...\right] \text{ (*)},$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| , \quad \int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \quad \text{(n > 1).}$$

II. Wir führen die Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung durch und haben für den Integranden $f(x) = \frac{8}{x^3 - x}$ auf Grund der drei reellen Nennernullstellen den Ansatz:

$$f(x) = \frac{8}{x^3 - x} = \frac{8}{x(x^2 - 1)} = \frac{8}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \quad \text{(**).}$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $x(x-1)(x+1)$ des Integranden ergibt:

$$8 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \quad \text{(***)}$$

In die Gleichung (***) werden nun spezielle x eingesetzt, insbesondere die Nullstellen des Nenners des Integranden, um die Koeffizienten A, B, C zu erhalten. Es ergibt sich:

x=0: 8 = A·(0-1)(0+1) + B·0·(0+1) + C·0·(0-1) = -A=> A = -8
x=1: 8 = A·(1-1)·(0+1) + B·1·(1+1) + C·1·(1-1) = 2B=> B = 4
x=-1: 8 = A·(-1-1)·(-1+1) + B·(-1)·(-1+1) + C·(-1)(-1-1) = 2C => C = 4.

Mit A = -8, B = 4, C = 4 gilt die Identität:

$$f(x) = \frac{8}{x^3 - x} = \frac{-8}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{x+1} \quad \text{(****).}$$

III. Integration ergibt gemäß (****):

$$\int \frac{8}{x^3 - x} dx = \int \frac{-8}{x} dx + \int \frac{4}{x-1} dx + \int \frac{4}{x+1} dx = -8\ln|x| + 4\ln|x-1| + 4\ln|x+1| .$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$\int \frac{8}{x^3 - x} dx = -8\ln|x| + 4\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + C$ mit C als Integrationskonstante.

2. Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + ... + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot ... \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^o \cdot ...} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + ... + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + ... + \frac{B_{o_1} x + C_{o_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1}} + ...\right] \text{ (*)},$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a|$, $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ (n > 1).

II. Wir führen die Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung durch und haben für den Integranden $f(x) = \frac{8}{x^3 - x}$ auf Grund der drei reellen Nennernullstellen den Ansatz:

$$f(x) = \frac{8}{x^3 - x} = \frac{8}{x(x^2-1)} = \frac{8}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \text{ (**)}.$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $x(x-1)(x+1)$ des Integranden ergibt:

$$8 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx =$$
$$(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A \text{ (***)}$$

Die Gleichung (***) liefert auf Grund von

$(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A = 0x^2 + 0x + 8$

mit Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem:

A+B+C = 0
B-C = 0
-A = 8.

Mit: -A = 8 ⇔ A = -8 folgt:

-8+B+C = 0 ⇔ B+C = 8
B-C = 0,

so dass Addition der beiden Gleichungen:

2B = 8 ⇔ B = 4

ergibt. Mit B = 4 ist auch: 4-C = 0 ⇔ 4 = C. Es gilt wegen A = -8, B = 4, C = 4 die Identität:

$$f(x) = \frac{8}{x^3 - x} = \frac{-8}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{x+1} \text{ (****)}.$$

III. Integration ergibt gemäß (****):

$$\int \frac{8}{x^3 - x} dx = \int \frac{-8}{x} dx + \int \frac{4}{x-1} dx + \int \frac{4}{x+1} dx = -8\ln|x| + 4\ln|x-1| + 4\ln|x+1| .$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$\int \frac{8}{x^3 - x} dx = -8\ln|x| + 4\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + C$ mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1373