Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x-1}{x^3+x}dx.$$

1. Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + \ldots + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot \ldots \cdot (x^2+p_1x+q_1)^o \cdot \ldots} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{o_1}x+C_{o_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{o_1}} + \ldots\right] \text{ (*)},$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a|, \int \frac{1}{(x-a)^n}dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \text{ (n > 1)},$$

schließlich nach Regeln für quadratische Faktoren, u.a.:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) \text{ (gemäß der Substitutionsregel)},$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x \text{ (als Grundintegral).}$$

II. Wir führen die Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung durch und haben für den Integranden $f(x) = \frac{2x-1}{x^3+x}$ auf Grund der einen reellen Nennernullstelle den Ansatz:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^3+x} = \frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \text{ (**).}$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $x(x^2+1)$ des Integranden ergibt:

$$2x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x \text{ (***)}$$

In die Gleichung (***) werden nun spezielle x eingesetzt, insbesondere die Nullstelle des Nenners des Integranden, um die Koeffizienten A, B, C zu erhalten. Es ergibt sich:

x=0: 2·0–1 = A·(0+1) + (B·0+C)·0 = A => A = -1
x=1: 2·1–1 = A·(1+1) + (B·1+C)·1 => 1 = 2A+B+C => 1= -2+B+C => B+C = 3
x=-1: 2·(-1)–1 = A·(1+1) + (B·(-1)+C)·(-1) => -3 =2A+B–C => -3 = -2+B–C => B–C = -1.

Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt:

2B = 2 => B = 1

und weiter:

B = 1 => 1–C = -1 => -C = -2 => C = 2.

Mit A = -1, B = 1, C = 2 gilt die Identität:

$f(x) = \frac{2x-1}{x^3+x} = \frac{-1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1}$ (****).

III. Integration ergibt gemäß (****):

$$\int \frac{2x-1}{x^3+x}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{x+2}{x^2+1}dx = -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$
$$-\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$\int \frac{2x-1}{x^3+x}dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C$ mit C als Integrationskonstante.

2. Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + \ldots + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot \ldots \cdot (x^2+p_1x+q_1)^o \cdot \ldots} =$$
$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{o_1}x+C_{o_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{o_1}} + \ldots\right] \text{ (*)},$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a|$, $\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ (n > 1),

schließlich nach Regeln für quadratische Faktoren, u.a.:

$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1)$ (gemäß der Substitutionsregel),

$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$ (als Grundintegral).

II. Wir führen die Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung durch und haben für den Integranden $f(x) = \frac{2x-1}{x^3+x}$ auf Grund der einen reellen Nennernullstelle den Ansatz:

$f(x) = \frac{2x-1}{x^3+x} = \frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ (**).

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $x(x^2+1)$ des Integranden ergibt:

$$2x-1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x = Ax^2+A+Bx^2+Cx = (A+B)x^2+Cx+A \quad (***)$$

Die Gleichung (***) liefert auf Grund von

$$(A+B)x^2+Cx+A = 0x^2+2x-1$$

mit Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem:

A+B = 0
C = 2
A = -1.

Mit: A = -1 folgt:

-1+B = 0 ⇔ B = 1.

Es gilt also wegen A = -1, B = 1, C = 2 die Identität:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^3+x} = \frac{-1}{x}+\frac{x+2}{x^2+1} \quad (****).$$

III. Integration ergibt gemäß (****):

$$\int \frac{2x-1}{x^3+x}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{x+2}{x^2+1}dx = -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$-\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{2x-1}{x^3+x}dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C$$ mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1374