Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Zeige, dass die folgende Integralformel gilt:

$$\int \sin^{2n} x dx = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j} \right) x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i+1}^{n} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \sin^{2i-1} x + C \text{, n}\varepsilon\mathbf{N}.$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Produktintegration:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

als Folgerung aus der Produktregel für Ableitungen.

II. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen nε**N** die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein n=k_0 ε**N** (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε**N**.

III. Wir verwenden das Beweisverfahren der vollständigen Induktion und beweisen als Induktionsanfang für n=1 die angeführte Formel. Dazu verwenden wir die Produktintegration und haben unter Verwendung der trigonometrischen Formel $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$:

$$\int \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot \sin x dx \underset{\left\{ \substack{u'=\sin x \Rightarrow u=-\cos x \\ v=\sin x \Rightarrow v'=\cos x} \right\}}{=} -\cos x \cdot \sin x - \int (-\cos x) \cdot \cos x dx =$$

$$-\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int (1-\sin^2 x)dx = -\sin x \cdot \cos x + \int 1 dx - \int \sin^2 x dx =$$

$$-\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx.$$

Die Gleichung

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx$$

lässt sich dann noch umstellen:

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx \qquad | + \int \sin^2 x dx$$

$$2\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x \qquad | :2$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x,$$

so dass wegen i=n=1 mit $\prod_{j=1}^{1}\frac{2j-1}{2j} = \frac{1}{2}$ und $\prod_{j=2}^{1}\frac{2j-1}{2j} = 1$ (leeres Produkt) die rechte Seite der zu beweisenden Integralformel trägt.

IV. Die <u>Induktionsannahme</u> sei:

$$\int \sin^{2k} x dx = \left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1} x + C \quad (*)$$

für ein gewisses n=k. Die <u>Induktionsbehauptung</u> für n=k+1:

$$\int \sin^{2(k+1)} x dx = \left(\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{k+1}\left(\prod_{j=i+1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1} x + C$$

ist dann unter Verwendung von (*) zu beweisen. In der Tat gilt ähnlich wie beim Beweis des Induktionsanfangs:

$$\int \sin^{2(k+1)} x dx = \int \sin^{2k+2} x dx = \int \sin x \cdot \sin^{2k+1} x dx \underset{\left\{\substack{u'=\sin x \Rightarrow u=-\cos x \\ v=\sin^{2k+1} x \Rightarrow v'=(2k+1)\sin^{2k} x\cos x}\right\}}{=}$$

$$(-\cos x)\cdot\sin^{2k+1} x \cdot \cos x - \int(-\cos x)\cdot(2k+1)\sin^{2k} x\cos x dx =$$

$$-\sin^{2k+1} x \cdot \cos x + (2k+1)\int \sin^{2k} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$-\sin^{2k+1} x \cdot \cos x + (2k+1)\int \sin^{2k} x \cdot (1-\sin^2 x)dx =$$

$$-\sin^{2k+1} x \cdot \cos x + (2k+1)\int (\sin^{2k} x - \sin^{2k+2} x)dx =$$

$$-\sin^{2k+1} x \cdot \cos x + (2k+1)\int \sin^{2k} x dx - (2k+1)\int \sin^{2k+2} x dx \underset{(*)}{=}$$

$$-\sin^{2k+1} x \cdot \cos x + (2k+1)\left(\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1} x\right) - (2k+1)\int \cos^{2k+2} x dx$$

$\Rightarrow$

$$\int \sin^{2k+2} x dx =$$

$$-\sin^{2k+1} x \cdot \cos x + (2k+1)\left(\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1} x\right) - (2k+1)\int \cos^{2k+2} x dx \Leftrightarrow$$

$$(2k+2)\int \sin^{2k+2} x dx = -\sin^{2k+1} x \cdot \cos x + (2k+1)\left(\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1} x\right) \Leftrightarrow$$

$$\int \sin^{2k+2} x dx = \frac{2k+1}{2k+2}\left(\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1} x\right) - \frac{1}{2k+2}\cdot\sin^{2k+1} x \cdot \cos x$$

$\Rightarrow$

$$\int \sin^{2(k+1)} x dx =$$

$$\frac{2k+1}{2k+2}\left(\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1} x\right) - \frac{1}{2k+2}\cdot\sin^{2k+1} x \cdot \cos x =$$

$$\left(\frac{2k+1}{2k+2}\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)x - \cos x \cdot \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\cdot\prod_{j=i+1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1} x - \frac{1}{2k+2}\cdot\sin^{2k+1} x \cdot \cos x =$$

$$\left(\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)x-\cos x\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1}x-\frac{1}{2k+2}\cdot\sin^{2k+1}x\cdot\cos x=$$

$$\left(\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)x-\cos x\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1}x-\cos x\cdot\left(\prod_{j=k+2}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2(k+1)}\cdot\sin^{2(k+1)-1}x=$$

$$\left(\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)x-\cos x\cdot\sum_{i=1}^{k+1}\left(\prod_{j=i+1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1}x,$$

was zu beweisen war. Es gilt also die oben angegebene Integralformel:

$$\int\sin^{2n}xdx=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{2j-1}{2j}\right)x-\cos x\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=i+1}^{n}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\sin^{2i-1}x+C\text{, } n\varepsilon\mathbf{N}.$$

V. Für die ersten natürlichen Zahlen ergeben sich die nachstehenden Formeln:

n=	Integral
1	$\int\sin^2 xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x$
2	$\int\sin^4 xdx=\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}\sin x\cdot\cos x-\frac{1}{4}\sin^3 x\cdot\cos x$
3	$\int\sin^6 xdx=\frac{5}{16}x-\frac{5}{16}\sin x\cdot\cos x-\frac{5}{24}\sin^3 x\cdot\cos x-\frac{1}{6}\sin^5 x\cdot\cos x$
4	$\int\sin^8 xdx=\frac{35}{128}x-\frac{35}{128}\sin x\cdot\cos x-\frac{35}{192}\sin^3 x\cdot\cos x-\frac{7}{48}\sin^5 x\cdot\cos x-\frac{1}{8}\sin^7 x\cdot\cos x$
	usw.

www.michael-buhlmann.de / 03.2022 / Aufgabe 1626