Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Doppelsumme

Aufgabe: Stelle die endliche Doppelsumme

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\cdot 3^{j}$$

als geschlossenen Ausdruck dar.

Lösung: I. Wir rufen uns zunächst die folgenden Summenformeln ins Gedächtnis:

$\sum_{i=0}^{n} q^{i} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ (geometrische Summe)

$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{i} b^{n-i} = (a+b)^{n}$ (binomischer Lehrsatz)

(a, b, q reell).

II. Wir berechnen:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\cdot 3^{j} =$$

$$\left(\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+...+\binom{n}{0}\right)\cdot 3^{0}+\left(\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+...+\binom{n}{1}\right)\cdot 3^{1}+...+\left(\binom{n-1}{n-1}+\binom{n}{n-1}\right)\cdot 3^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot 3^{n} =$$

$$\binom{0}{0}\cdot 3^{0}+...+\left(\binom{n-1}{0}\cdot 3^{0}+\binom{n-1}{1}\cdot 3^{1}+...+\binom{n-1}{n-1}\cdot 3^{n-1}\right)+\left(\binom{n}{0}\cdot 3^{0}+\binom{n}{1}\cdot 3^{1}+...+\binom{n}{n}\cdot 3^{n}\right) =$$

$$1\cdot 3^{0}\cdot 1^{0}+...+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\cdot 3^{i}\cdot 1^{n-1-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot 3^{i}\cdot 1^{n-i} = 4^{0}+...+4^{n-1}+4^{n} = \sum_{i=0}^{n} 4^{i} = \frac{4^{n+1}-1}{4-1} =$$

$$\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$$

und haben dabei den binomischen Lehrsatz (a=3, b=1) und die geometrische Summe (q=4) verwendet.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1178