Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Summenformel

Aufgabe: Zeige, dass die folgende Summenformel gilt:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}, \text{ n}\varepsilon\mathbf{N}.$$

Lösung (mit vollständiger Induktion): I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen nε**N** die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein n=k_0 ε**N** (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε**N**.

II. Induktionsbeweis der Summenformel:

Behauptung: $\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$, nε**N**.

Beweis:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $\sum_{i=1}^{2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{n+i}$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $\sum_{i=1}^{2k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i}$, angenommen als wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $\sum_{i=1}^{2(k+1)} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{k+1+i}$, als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir weisen die Induktionsbehauptung unter Benutzung der Induktionsannahme (*) nach und beweisen damit die Gültigkeit des Induktionsschritts. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{2(k+1)} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{(-1)^{2k+1+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+2+1}}{2k+2} =$$

$$\sum_{i=1}^{2k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+3}}{2k+2} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \underset{(*)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{k+i} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} =$$

$$\frac{2}{2k+2} + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{k+i} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{k+i} + \frac{1}{2k+1} + \frac{2}{2k+2} - \frac{1}{2k+2} =$$

$$\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{k+i} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k+1+i} + \frac{1}{k+1+k} + \frac{1}{k+1+k+1} =$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{k+1+i}.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung nachgewiesen.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle $n \in$ **N**.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1280