Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Bestimme an die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{x} + 4x$$

die Berührpunkte und die Tangenten, die durch den Punkt P(2|0) verlaufen.

Lösung (mit Ableitung und Differenzenquotienten): I. Im Berührpunkt B(u|f(u)) müssen Differenzenquotient der Tangenten als Gerade durch Berührpunkt und Punkt P(x|y) und Ableitung im Berührpunkt identisch sein, also:

t: $\frac{y - f(u)}{x - u} = f'(u)$ (*).

Auflösen der Gleichung (*) nach u ergibt die Berührstellen u_1, … Durch die Berührpunkte $B_1(u_1|f(u_1))$, … und den Punkt P(x|y) gehen dann die Tangenten: t_1: $y = f'(u_1)(x-u_1) + f(u_1)$, …

II. Zu $f(x) = \frac{2}{x} + 4x = 2x^{-1} + 4x$ mit $f(u) = \frac{2}{u} + 4u$ bilden wir die Ableitungsfunktion

$f'(x) = -2x^{-2} + 4 = -\frac{2}{x^2} + 4$ mit $f'(u) = -\frac{2}{u^2} + 4$ an der zu berechnenden Berührpunktstelle u

sowie mit dem Punkt P(2|0) (x = 2, y = 0) den Differenzenquotienten $\frac{0 - f(u)}{2 - u} = \frac{-\frac{2}{u} - 4u}{2 - u}$. Gleichsetzen von Differenzenquotient und Ableitung ergibt:

$$\frac{-\frac{2}{u} - 4u}{2 - u} = -\frac{2}{u^2} + 4 \qquad | \cdot(2-u)$$

$$-\frac{2}{u} - 4u = \left(-\frac{2}{u^2} + 4\right)(2 - u) \qquad \text{(Ausrechnen, Klammern auflösen)}$$

$$-\frac{2}{u} - 4u = -\frac{4}{u^2} + \frac{2}{u} + 8 - 4u \qquad | \cdot u^2$$

$$-2u - 4u^3 = -4 + 2u + 8u^2 - 4u^3 \qquad | +4u^3, +2u$$

$$0 = 8u^2 + 4u - 4 \qquad (**)$$

Die quadratische Gleichung (**) hat auf Grund von

$$8u^2 + 4u - 4 = 0 \qquad | :4$$

$$2u^2 + u - 1 = 0 \qquad \text{(abc-Formel)}$$

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

die Lösungen: $u_1 = -1$, $u_2 = 0{,}5$. Die Berührpunkte berechnen sich mit f(-1) = -6, f(0,5) = 6 als: $B_1(-1|-6)$

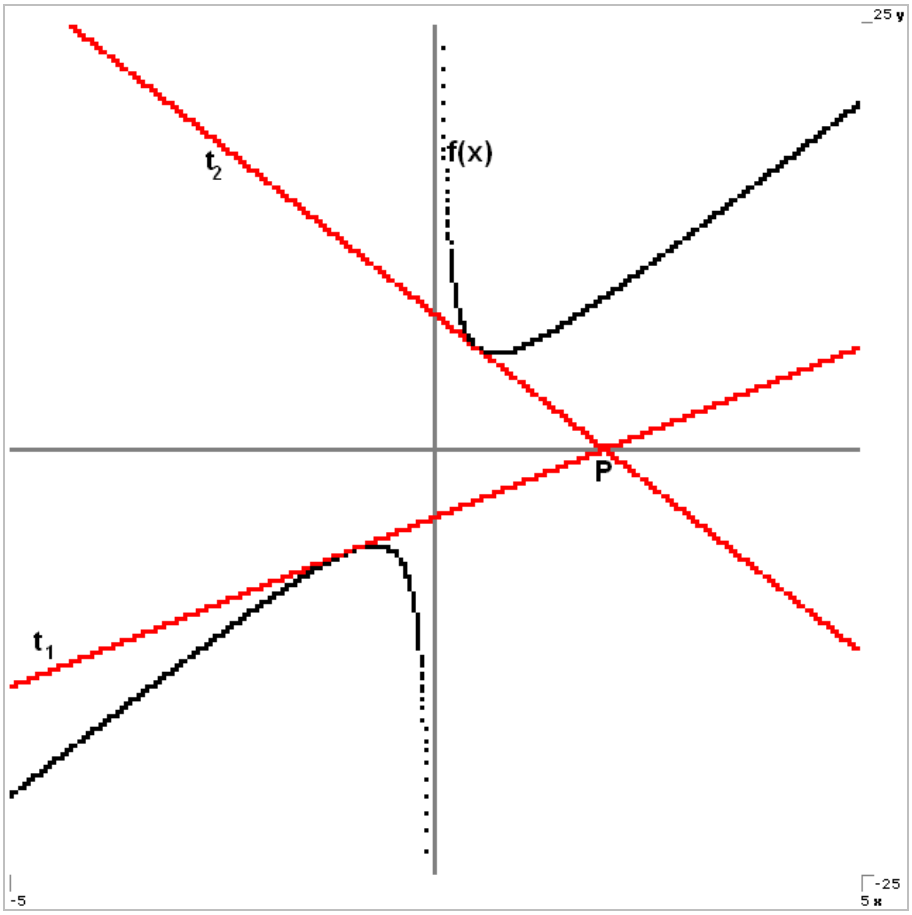
$B_2(0{,}5|6)$,

die Tangenten mit f'(-1) = 2, f'(0,5) = -4 als:

t_1: y = f'(-1)(x+1)+f(-1) = 2x–4

t_2: y = f'(0,5)(x–0,5)+f(0,5) = -4x+8.

Alle Tangenten gehen durch den Punkt P(2|0) (y(2) = 0) und durch den jeweiligen Berührpunkt.



www.michael-buhlmann.de / 01.2016 / Aufgabe 190