Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Berechne die Gleichung der Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x},\ x_0 = -1.$$

1. Lösung (mit der Geradengleichung): I. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung y = mx + c; m ist dann die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, c der y-Achsenabschnitt der Tangente u.a. mit $c = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$.

II. Aus $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1}$ erhalten wir mit Summen- und Potenzregel die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x + x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2}$. Wir benötigen:

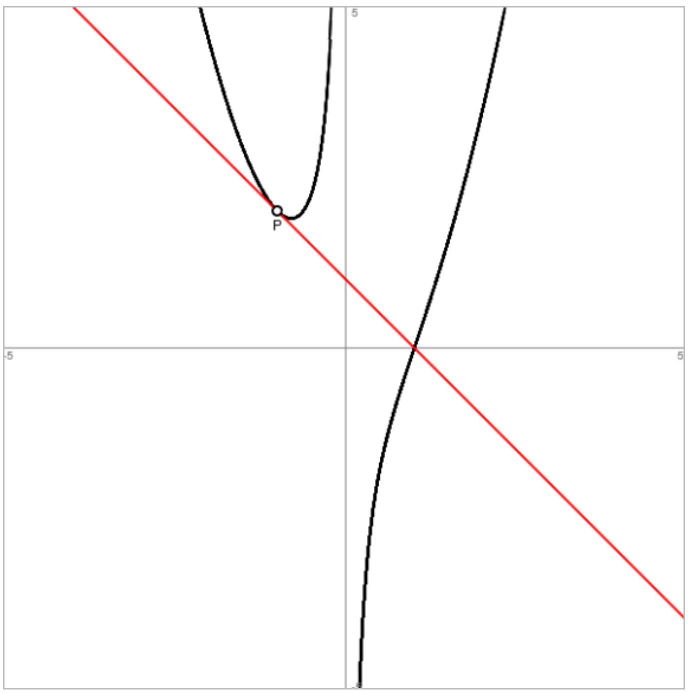
$$f(-1) = (-1)^2 - \frac{1}{-1} = 1 + 1 = 2$$

$$f'(-1) = 2\cdot(-1) + \frac{1}{(-1)^2} = -2 + 1 = -1$$

wegen der vorgegebenen Stelle $x_0 = -1$, daneben die Gleichung der Tangente t: y = mx + c. Es gilt weiter: m = f'(-1) = -1, so dass t: y = -1x + c = -x + c gilt. Wegen f(-1) = 2 wird die Tangente im Punkt P(-1|2) errechnet. Punktprobe mit x=-1 und y=2 ergibt mit dem Einsetzen in die Geradengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt c:

$2 = -(-1) + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow 1 = c$.

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also: t: y = -x + 1.



2. Lösung (mit der Geradengleichung): I. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung y = mx + b; m ist dann die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, b der y-Achsenabschnitt der Tangente u.a. mit $b = f(x_0) – f'(x_0)\cdot x_0$.

II. Aus $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1}$ erhalten wir mit Summen- und Potenzregel die Ableitungsfunktion

$f'(x) = 2x + x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2}$. Wir benötigen:

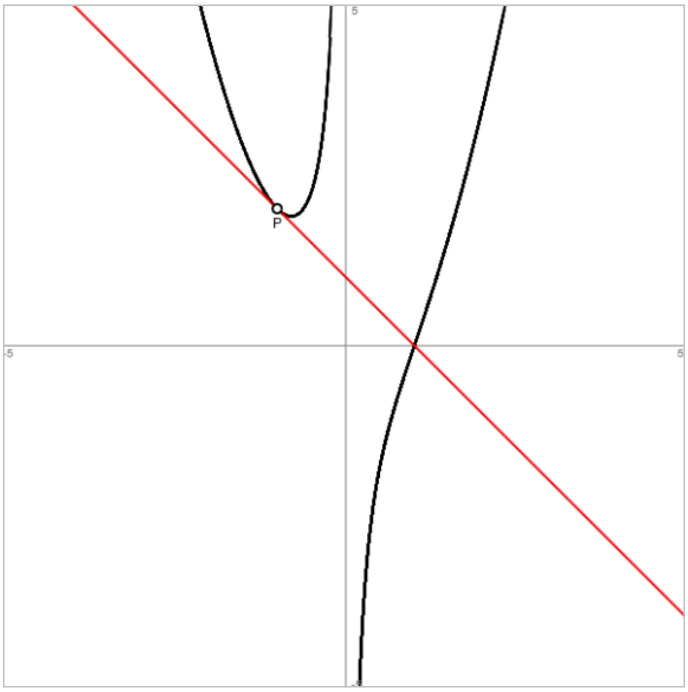
$$f(-1) = (-1)^2 - \frac{1}{-1} = 1 + 1 = 2$$

$$f'(-1) = 2\cdot(-1) + \frac{1}{(-1)^2} = -2 + 1 = -1$$

wegen der vorgegebenen Stelle $x_0 = -1$, daneben die Gleichung der Tangente t: y = mx + b. Es gilt weiter: m = f'(-1) = -1, so dass t: y = -1x + b = -x + b gilt. Wegen f(-1) = 2 wird die Tangente im Punkt P(-1|2) errechnet. Punktprobe mit x=-1 und y=2 ergibt mit dem Einsetzen in die Geraden-gleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt b:

2 = -(-1) + b ⇔ 2 = 1 + b ⇔ 1 = b.

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also: t: y = -x + 1.



3. Lösung (mit der Tangentenformel): I. Allgemein gilt die Formel der Tangentengleichung:

t: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

mit Funktion f(x), Ableitungsfunktion f'(x) und t als Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0.

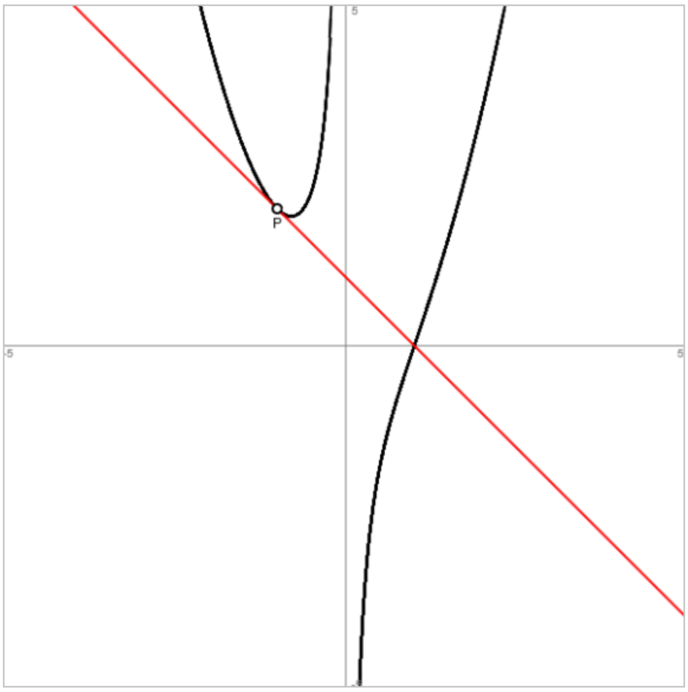
II. Wir berechnen aus der Funktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1}$ nach Summen- und Potenzregel die Ableitung $f'(x) = 2x + x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2}$. Für $x_0 = -1$ ergeben sich die Werte:

$$f(-1) = (-1)^2 - \frac{1}{-1} = 1 + 1 = 2$$

$$f'(-1) = 2\cdot(-1) + \frac{1}{(-1)^2} = -2 + 1 = -1.$$

Die Tangente an die Funktion an der Stelle $x_0 = -1$ lautet mittels Einsetzen von f(-1) und f'(-1) in die Tangentengleichung:

t: $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1) = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -1(x+1) + 2 = -x - 1 + 2 = -x + 1$.



www.michael-buhlmann.de / 10.2018 / Aufgabe 630