Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Berechne die Gleichung der Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0:

$$f(x) = 2\cdot\sin(x) + 1,\ x_0 = \pi/4.$$

1. Lösung (mit der Geradengleichung): I. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung $y = mx + c$; m ist dann die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, c der y-Achsenabschnitt der Tangente u.a. mit $c = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$.

II. Aus $f(x) = 2\cdot\sin(x)$ erhalten wir mit der Faktorregel und der Regel für die Sinusfunktion die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2\cdot\cos(x)$. Wir benötigen auf Grund der vorgegebenen Stelle $x_0 = \pi/4$ den Funktionswert und den Wert der Ableitung dort, also:

$f(\pi/4) = 2\cdot\sin(\pi/4) = 2\cdot1/2\cdot\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$
$f'(\pi/4) = 2\cdot\cos(\pi/4) = 2\cdot1/2\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Daneben benötigen wir die Geradengleichung der Tangente t: $y = mx + c$. Es gilt weiter:

$m = f'(\pi/4) = \sqrt{2}$,

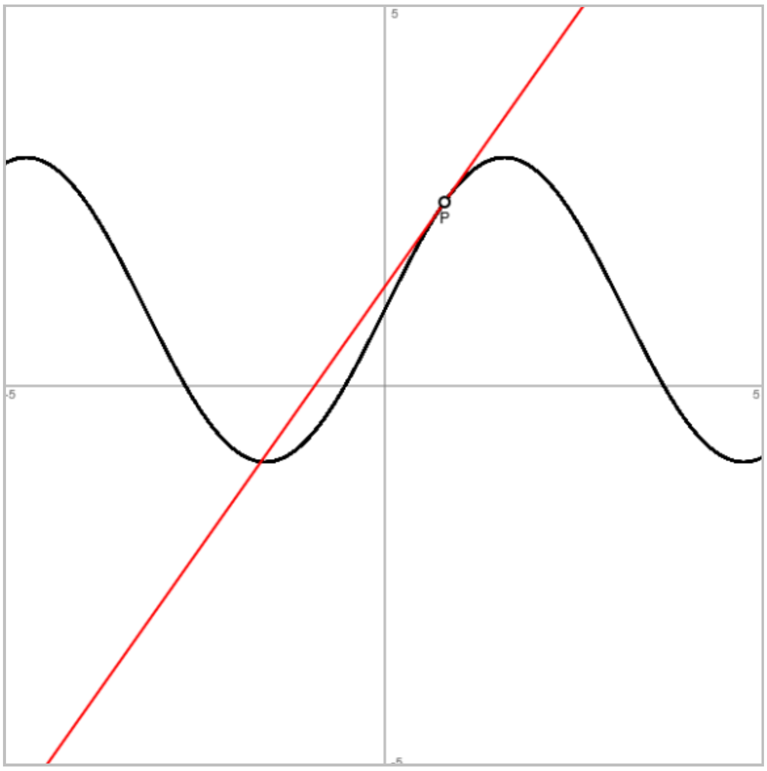
so dass t: $y = x\sqrt{2} + c$ gilt. Wegen:

$f(\pi/4) = \sqrt{2} + 1$

wird die Tangente im Punkt $P(\pi/4|\sqrt{2} + 1)$ errechnet. Punktprobe mit $x = \pi/4$ und $y = \sqrt{2} + 1$ ergibt mit dem Einsetzen in die Tangentengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt c:

$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2}\cdot\pi/4 + c \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}\cdot\pi/4 = c \Leftrightarrow c = 1 + (1- \pi/4)\sqrt{2}$.

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also: t: $y = x\sqrt{2} + 1 + (1- \pi/4)\sqrt{2} \approx 1{,}4142x + 1{,}3035$.



2. Lösung (mit der Geradengleichung): I. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung $y = mx + b$; m ist dann die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, b der y-Achsenabschnitt der Tangente u.a. mit $b = f(x_0) – f'(x_0)\cdot x_0$.

II. Aus $f(x) = 2\cdot\sin(x)$ erhalten wir mit der Faktorregel und der Regel für die Sinusfunktion die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2\cdot\cos(x)$. Wir benötigen auf Grund der vorgegebenen Stelle $x_0 = \pi/4$ den Funktionswert und den Wert der Ableitung dort, also:

$f(\pi/4) = 2\cdot\sin(\pi/4) = 2\cdot 1/2\cdot\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$
$f'(\pi/4) = 2\cdot\cos(\pi/4) = 2\cdot 1/2\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Daneben benötigen wir die Geradengleichung der Tangente t: $y = mx + b$. Es gilt weiter:

$m = f'(\pi/4) = \sqrt{2}$,

so dass t: $y = x\sqrt{2} + b$ gilt. Wegen:

$f(\pi/4) = \sqrt{2} + 1$

wird die Tangente im Punkt $P(\pi/4|\sqrt{2} + 1)$ errechnet. Punktprobe mit $x = \pi/4$ und $y = \sqrt{2} + 1$ ergibt mit dem Einsetzen in die Tangentengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt b:

$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2}\cdot\pi/4 + b \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 – \sqrt{2}\cdot\pi/4 = b \Leftrightarrow b = 1 + (1– \pi/4)\sqrt{2}$.

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also: t: $y = x\sqrt{2} + 1 + (1– \pi/4)\sqrt{2} \approx 1{,}4142x + 1{,}3035$.

3. Lösung (mit der Tangentenformel): I. Allgemein gilt die Formel der Tangentengleichung:

t: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

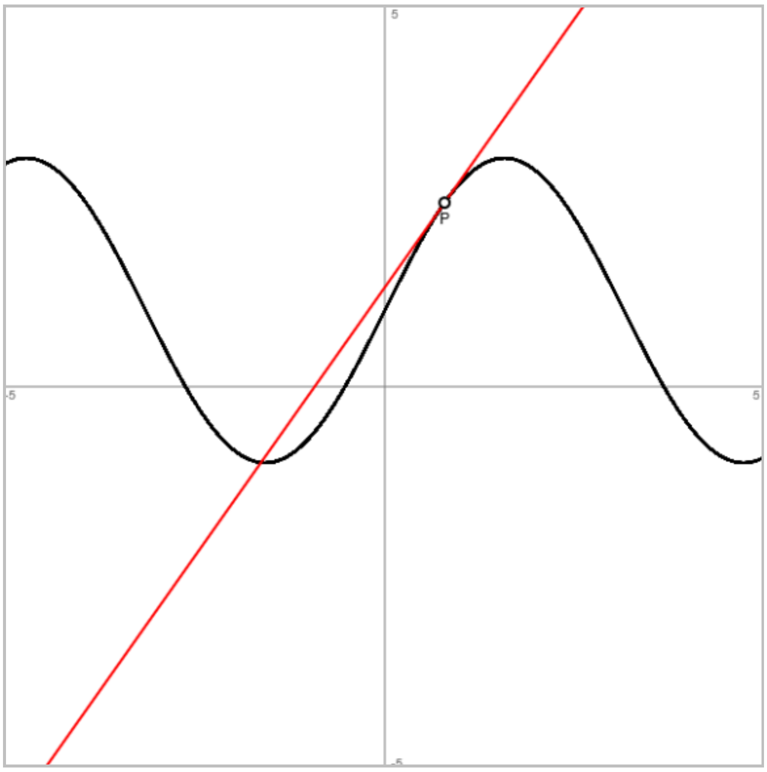
mit Funktion f(x), Ableitungsfunktion f'(x) und t als Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0.

II. Wir berechnen aus Funktion $f(x) = 2\cdot\sin(x) + 1$ und Ableitung $f'(x) = 2\cdot\cos(x)$ die Werte:

$f(\pi/4) = 2\cdot\sin(\pi/4) = 2\cdot 1/2\cdot\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$
$f'(\pi/4) = 2\cdot\cos(\pi/4) = 2\cdot 1/2\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Die Tangente an die Funktion an der Stelle $x_0 = \pi/4$ lautet mittels Einsetzen von $f(\pi/4)$ und $f'(\pi/4)$ in die Tangentengleichung:

t: $y = f'(\pi/4)(x–\pi/4) + f(\pi/4) = \sqrt{2}\cdot(x–\pi/4) + \sqrt{2} + 1 = x\sqrt{2} +\sqrt{2}\cdot\pi/4 + \sqrt{2} + 1 = x\sqrt{2} + 1 + (1– \pi/4)\sqrt{2} \approx 1{,}4142x + 1{,}3035$.



www.michael-buhlmann.de / 10.2018 / Aufgabe 632