Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Bestimme an die Funktion f(x) = $\frac{1}{2}x^4 + 4x$ die Tangente, welche parallel zur Geraden y = 2x – 5 ist.

Lösung: I. Die Steigung der vorgegebenen Geraden g: y = mx + c_0 ist m. Es ergibt sich dann die Vorgehensweise zur Berechnung der Stellen x_1, x_2, …, in denen eine vorgegebene Funktion die Steigung m besitzt, durch Bildung der 1. Ableitung und das Umstellen der folgenden Gleichung nach der Unbekannten x:

$$f'(x) = m \text{ -> } x_1, x_2, \ldots$$

Einsetzen von x_1, x_2, … in die Funktionsgleichung führt auf die gesuchten Punkte $P(x_1|f(x_1))$, $Q(x_2|f(x_2))$, … mit $f'(x_1) = f'(x_2) = \ldots = m$, d.h.: die Punkte haben Tangenten, die parallel zur vorgegebenen Geraden g sind.

II. Die Steigung der vorgegebenen Geraden y = 2x – 5 ist m = 2. Wir bilden die 1. Ableitung f'(x) der vorgegebenen Funktion f(x) = $\frac{1}{2}x^4 + 4x$ und erhalten: f'(x) = $2x^3 + 4$. Gleichsetzen der Ableitung mit der Steigung m = 2 ergibt:

$f'(x) = m \Leftrightarrow 2x^3 + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^3 = -2 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$.

Wegen f(-1) = -3,5 folgt für den gesuchten Punkt auf der Funktion f(x) mit der Steigung m = 2: P(-1|-3,5).

III. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an einer Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung t: y = mx + c; m ist dann die Tangentensteigung m = $f'(x_0)$, c der y-Achsenabschnitt der Tangente mit $c = f(x_0) – f'(x_0)\cdot x_0$.

IV. Es gilt gemäß der Aufgabenstellung (Tangente parallel zu y = 2x – 5, d.h.: f'(x) = m = 2) für die Tangente im Punkt P(-1|-3,5) an die Funktion f(x) = $\frac{1}{2}x^4 + 4x$ die Beziehung:

f'(-1) = 2,

so dass das Folgende zur Berechnung der Tangentengleichungen trägt: Wegen f'(-1) = 2 = m und der allgemeinen Geradengleichung t: y = mx + c lässt sich hier m durch 2 ersetzen; also folgt:

t: y = 2x + c.

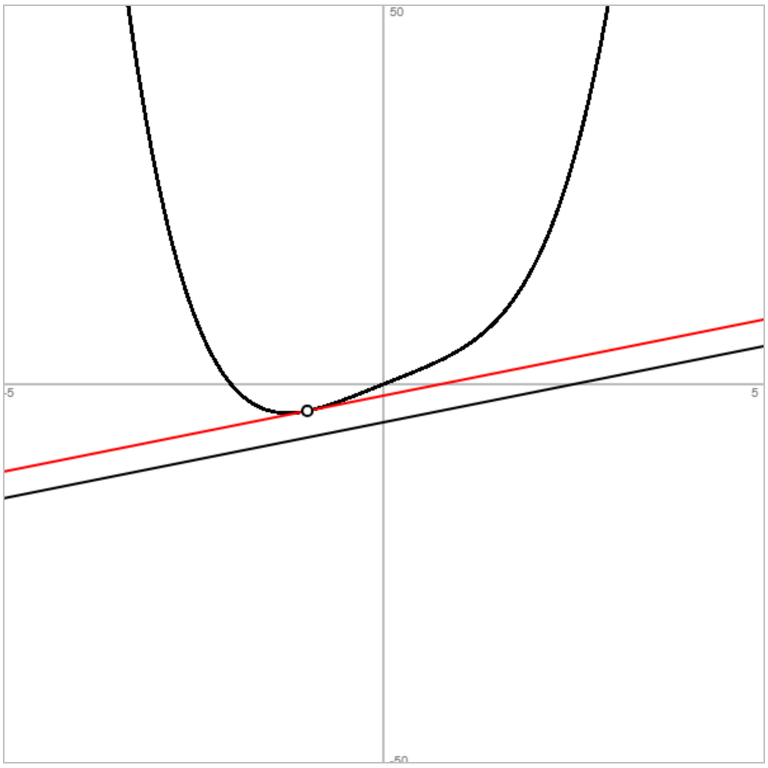
Punktprobe mit dem Punkt P(-1|-3,5) führt durch Einsetzen von x = -1 und y = -3,5 auf die Berechnung von c:

$y = 2x + c \text{ -> } -3{,}5 = 2\cdot(-1) + c \Leftrightarrow -3{,}5 = -2 + c \Leftrightarrow c = -1{,}5$.

Die Tangentengleichung durch den Punkt P(-1|-3,5) lautet damit:

t: y = 2x – 1,5.

Die errechnete Tangente y = 2x – 1,5 hat damit dieselbe Steigung wie die dazu parallele Gerade y = 2x – 5.



www.michael-buhlmann.de / 10.2023 / Aufgabe 1903