

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Tangenten

---

**Aufgabe:** Wo schneidet die Tangente an die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x+5}$  an der Stelle  $x_0 = -1$  die Achsen des x-y-Koordinatensystems?

**Lösung:** I. Allgemein gilt für die gesuchte Tangente an der Stelle  $x_0$  bzw. im Punkt  $P(x_0|f(x_0))$  die Geradengleichung  $t: y = mx + c$ ;  $m$  ist dann die Tangentensteigung  $m = f'(x_0)$ ,  $c$  der y-Achsenabschnitt der Tangente mit  $c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ .

II. Aus  $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x+5}$  erhalten wir mit Produkt-, Ketten-, Faktor- und Potenzregel sowie der Regel für das Ableiten von Quadratwurzeln aus:

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v(x) = \sqrt{x+5} \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

die Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{x+5} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = \frac{1}{2}\sqrt{x+5} + \frac{x}{4\sqrt{x+5}}.$$

$$\text{Wir benötigen: } f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \sqrt{-1+5} = -\frac{1}{2}\sqrt{4} = -1 \text{ und: } f'(-1) = \frac{1}{2}\sqrt{-1+5} + \frac{-1}{4\sqrt{-1+5}} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

wegen der vorgegebenen Stelle  $x_0 = -1$ , weiter die Geradengleichung der Tangente  $t: y = mx + c$ .

Es gilt weiter:  $m = f'(-1) = \frac{7}{8}$ , so dass  $t: y = \frac{7}{8}x + c$  folgt. Wegen  $f(-1) = -1$  wird die Tangente im

Punkt  $P(-1|-1)$  errechnet. Punktprobe mit  $x=-1$  und  $y=-1$  ergibt mit dem Einsetzen in die Geradengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt  $c$ :

$$-1 = \frac{7}{8} \cdot (-1) + c \Leftrightarrow -1 = -\frac{7}{8} + c \Leftrightarrow -\frac{1}{8} = c.$$

Die gesuchte Tangentengleichung lautet also:  $t: y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}$ .

III. Die Ermittlung des Schnittpunktes der Tangente  $t: y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}$  mit der y-Achse des x-y-

Koordinatensystems geschieht durch Einsetzen von  $x=0$  in die Tangentengleichung und Errechnen des y-Wertes:

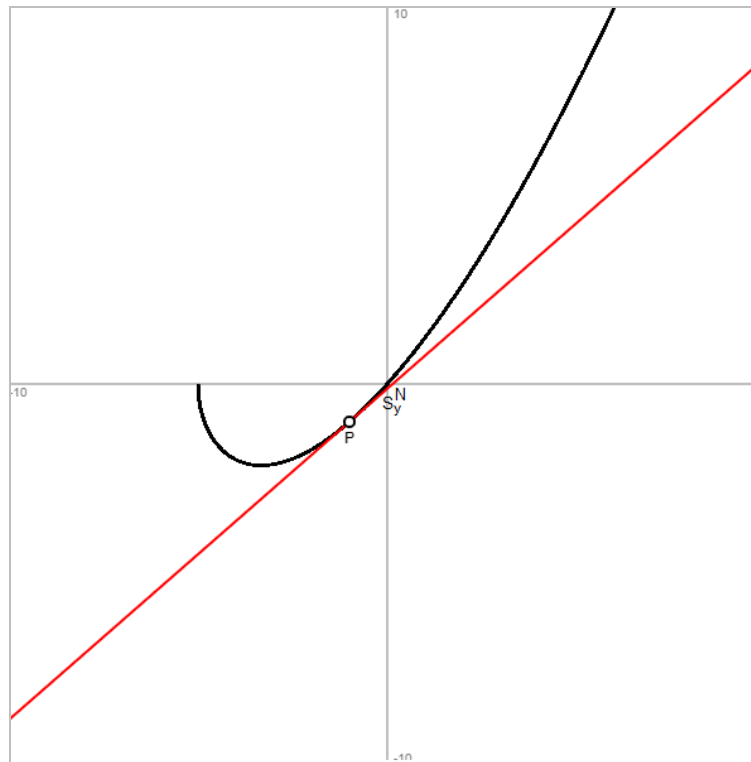
$$x = 0 \rightarrow y = \frac{7}{8} \cdot 0 - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Der y-Achsen-Abschnittspunkt als Schnittpunkt mit der y-Achse lautet damit:  $S_y(0|-\frac{1}{8})$ .

IV. Der Schnittpunkt der Tangente  $t: y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}$  an die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x+5}$  an der Stelle  $x_0 = -1$  mit der x-Achse ergibt sich aus dem Nullsetzen der Tangentengleichung:

$$\frac{7}{8}x - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 7x - 1 = 0 \Leftrightarrow 7x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}.$$

Die Nullstelle der Tangente als Schnittpunkt mit der x-Achse lautet:  $N(\frac{1}{7} | 0)$ .



[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 10.2023 / Aufgabe 1910