Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Gesucht sind die Tangenten an die Parabel f(x) = x^2 + 2x durch den Punkt P(1|-1).

Lösung: I. Die Tangente t an eine Funktion f(x) in einem noch unbekannten Berührpunkt B(u|f(u)) lautet:

$$\text{t: } y = f'(u)(x-u) + f(u)$$

Da die Tangente durch einen Punkt P(x_0|y_0) außerhalb von f(x) gehen soll, ergibt die Punktprobe den Ansatz:

$$\text{t: } y_0 = f'(u)(x_0-u) + f(u) \text{ (*).}$$

Falls möglich, ergibt das Auflösen der Gleichung (*) nach u die Berührstellen u_1, … Durch die Berührpunkte B_1(u_1|f(u_1)), … und den Punkt P(x_0|y_0) gehen dann die hier zu ermittelnden Tangenten:
t_1: y = f'(u_1)(x-u_1) + f(u_1) (Tangentenformel) bzw.
t_1: y = $\dfrac{f(u_1)-y_0}{u_1-x_0}(x-x_0)+y_0$ (Zweipunkteform [P(x_0|y_0), B_1(u_1|f(u_1))]), …

II. Zur Funktion f(x) = x^2 + 2x und deren 1. Ableitung f'(x) = 2x + 2 ist: f(u) = u^2 + 2u, f'(u) = 2u + 2. Mit dem Ansatz: $y_0 = f'(u)(x_0-u)+f(u)$ (*) und dem Punkt P(1|-1) (x_0 = 1, y_0 = -1) erhalten wir:

$$-1 = f'(u)(1-u)+f(u) \Leftrightarrow -1 = (2u+2)(1-u)+u^2+2u \Leftrightarrow$$
$$-1 = 2u-2u^2+2-2u+u^2+2u \Leftrightarrow -1 = -u^2-1 = -u^2+2u+2 \Leftrightarrow 0 = -u^2+2u+3 \Leftrightarrow$$
$$u^2-2u-3=0 \Leftrightarrow u_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm4}{2} \Leftrightarrow u_1 = \frac{2-4}{2} = -1,\quad u_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

und damit als gesuchte Stellen auf der Parabel: u_1 = -1, u_2 = 3 und als Berührpunkte: B_1(-1|-1) (mit: f(-1) = $(-1)^2$ + 2·(-1) = -1), B_2(3|15) (mit: f(3) = 3^2 + 2·3 = 15).

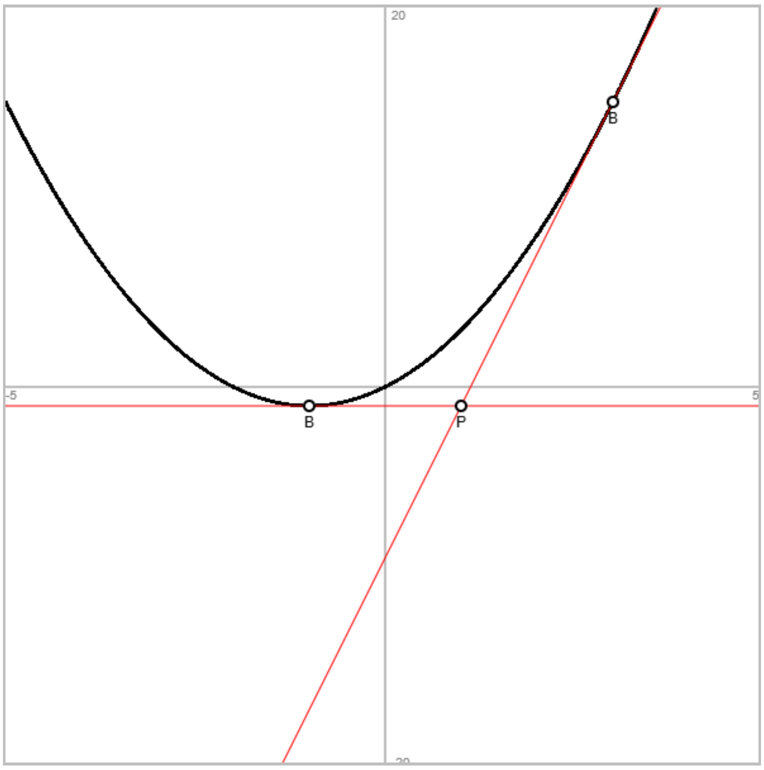
III. Die Tangenten an die Funktion f(x) lauten wegen der Berührpunkte B_1(-1|-1) und B_2(3|15) und aufgrund von f'(-1) = 2·(-1) + 2 = 0 und f'(3) = 2·3 + 2 = 8:
t_1: y = 0(x+1) – 1 = -1
t_2: y = 8(x-3) + 15 = 8x – 24 + 15 = 8x – 9.
mit der Tangentenformal. Beide Tangenten verlaufen durch den Punkt P(2|0).

IV. Alternativ lassen sich die Tangenten mit Hilfe der Zweipunkteform berechnen:

P(1|-1), B_1(-1|-1) => t_1: y = $\dfrac{-1-(-1)}{-1-1}(x+1)-1$ = 0 – 1 = -1

P(1|-1), B_2(3|15) => t_2: y = $\dfrac{15-(-1)}{3-1}(x-3)-1 = \dfrac{16}{2}(x-3)-1$ = 8(x-3) + 15 = 8x – 24 + 15 = 8x – 9.

V. Die Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 2x$ und der Tangenten t_1: $y = -1$, t_2: $y = 8x - 9$ sind nachstehend abgebildet:



www.michael-buhlmann.de / 11.2025 / Aufgabe 2526