Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Gesucht sind die Tangenten an die Hyperbel f(x) = $\frac{4}{x}$ durch den Punkt P(8|-40).

Lösung: I. Die Tangente t an eine Funktion f(x) in einem noch unbekannten Berührpunkt B(u|f(u)) lautet:

$$\text{t: } y = f'(u)(x-u)+f(u)$$

Da die Tangente durch einen Punkt P(x_0|y_0) außerhalb von f(x) gehen soll, ergibt die Punktprobe den Ansatz:

$$\text{t: } y_0 = f'(u)(x_0-u)+f(u) \text{ (*).}$$

Falls möglich, ergibt das Auflösen der Gleichung (*) nach u die Berührstellen u_1, … Durch die Berührpunkte $B_1(u_1|f(u_1))$, … und den Punkt P(x_0|y_0) gehen dann die hier zu ermittelnden Tangenten:

t_1: y = f'(u_1)(x-u_1) + f(u_1) (Tangentenformel) bzw.

t_1: y = $\frac{f(u_1)-y_0}{u_1-x_0}(x-x_0)+y_0$ (Zweipunkteform [P(x_0|y_0), $B_1(u_1|f(u_1))$]), …

II. Zur Funktion f(x) = $\frac{4}{x}$ und deren 1. Ableitung f'(x) = $-\frac{4}{x^2}$ ist: f(u) = $\frac{4}{u}$, f'(u) = $-\frac{4}{u^2}$. Mit dem Ansatz: $y_0 = f'(u)(x_0-u)+f(u)$ (*) und dem Punkt P(8|-40) (x_0 = 8, y_0 = -40) erhalten wir:

$$-40 = f'(u)(8-u)+f(u) \Leftrightarrow -40 = -\frac{4}{u^2}(8-u)+\frac{4}{u} \Leftrightarrow -40u^2 = -4(8-u)+4u \Leftrightarrow$$

$$-40u^2 = -32+4u+4u \Leftrightarrow -40u^2 = -32+8u \Leftrightarrow 0 = 40u^2+8u-32 \Leftrightarrow 0 = 10u^2+2u-8 \Leftrightarrow$$

$$u_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 10\cdot(-8)}}{2\cdot 10} = \frac{-2\pm\sqrt{324}}{20} = \frac{-2\pm 18}{20} \Leftrightarrow u_1 = \frac{-2-18}{20} = -1,\quad u_2 = \frac{-2+18}{20} = 0{,}8$$

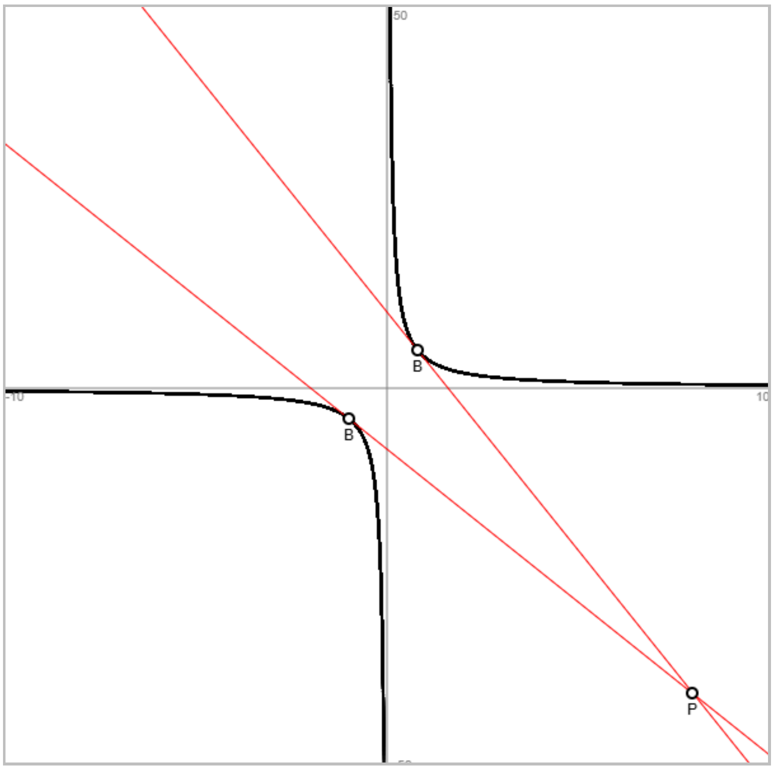
und damit als gesuchte Stellen auf der Hyperbel: u_1 = -1, u_2 = 0,8 und als Berührpunkte: B_1(-1|-4) (mit: f(-1) = 4/(-1) = -4), B_2(0,8|5) (mit: f(0,8) = 4/0,8 = 5).

III. Die Tangenten an die Funktion f(x) lauten wegen der Berührpunkte B_1(-1|-4) und B_2(0,8|5) und aufgrund von f'(-1) = -4/$(-1)^2$ = -4 und f'(0,8) = -4/$0{,}8^2$ = -6,25:

t_1: y = -4(x+1) – 4 = -4x – 4 – 4 = -4x – 8
t_2: y = -6,25(x-0,8) + 5 = -6,25x + 5 + 5 = -6,25x +10.

mit der Tangentenformal. Beide Tangenten verlaufen durch den Punkt P(8|-40).

V. Die Graphen der Funktion f(x) = $\frac{4}{x}$ und der Tangenten t_1: y = -4x – 8, t_2: y = -6,25x + 10 sind nachstehend abgebildet:



www.michael-buhlmann.de / 11.2025 / Aufgabe 2527