Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Tangenten

Aufgabe: Gesucht ist die Tangente an die Exponentialfunktion f(x) = $2e^{0,5x}$ durch den Punkt P(4|0).

Lösung: I. Die Tangente t an eine Funktion f(x) in einem noch unbekannten Berührpunkt B(u|f(u)) lautet:

$$t:\ y = f'(u)(x-u) + f(u)$$

Da die Tangente durch einen Punkt P(x_0|y_0) außerhalb von f(x) gehen soll, ergibt die Punktprobe den Ansatz:

$$t:\ y_0 = f'(u)(x_0 - u) + f(u)\ (*).$$

Falls möglich, ergibt das Auflösen der Gleichung (*) nach u die Berührstellen u_1, … Durch die Berührpunkte $B_1(u_1|f(u_1))$, … und den Punkt P(x_0|y_0) gehen dann die hier zu ermittelnden Tangenten:

t_1: y = f'(u_1)(x-u_1) + f(u_1) (Tangentenformel) bzw.

t_1: y = $\frac{f(u_1) - y_0}{u_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$ (Zweipunkteform [P(x_0|y_0), $B_1(u_1|f(u_1))$]), …

II. Zur Funktion f(x) = $2e^{0,5x}$ und deren 1. Ableitung f'(x) = $2 \cdot 0,5e^{0,5x} = e^{0,5x}$ ist: f(u) = $2e^{0,5u}$, f'(u) = $e^{0,5u}$. Mit dem Ansatz: $y_0 = f'(u)(x_0 - u) + f(u)$ (*) und dem Punkt P(4|0) (x_0 = 4, y_0 = 0) erhalten wir:

$$0 = f'(u)(4-u) + f(u) \Leftrightarrow 0 = e^{0,5u}(4-u) + 2e^{0,5u} \Leftrightarrow 0 = (4-u) + 2 \Leftrightarrow 0 = 6 - u \Leftrightarrow u = 6$$

und damit als gesuchte Stelle auf der Exponentialfunktion: u = 6 und als <u>Berührpunkt</u>: B(6|$2e^3$) (mit: f(6) = $2 \cdot e^{0,5 \cdot 6}$ = $2e^3$).

III. Die <u>Tangente</u> an die Funktion f(x) lautet wegen des Berührpunkts B(6|$2e^3$) und aufgrund von f'(6) = $e^{0,5 \cdot 6}$ = e^3:

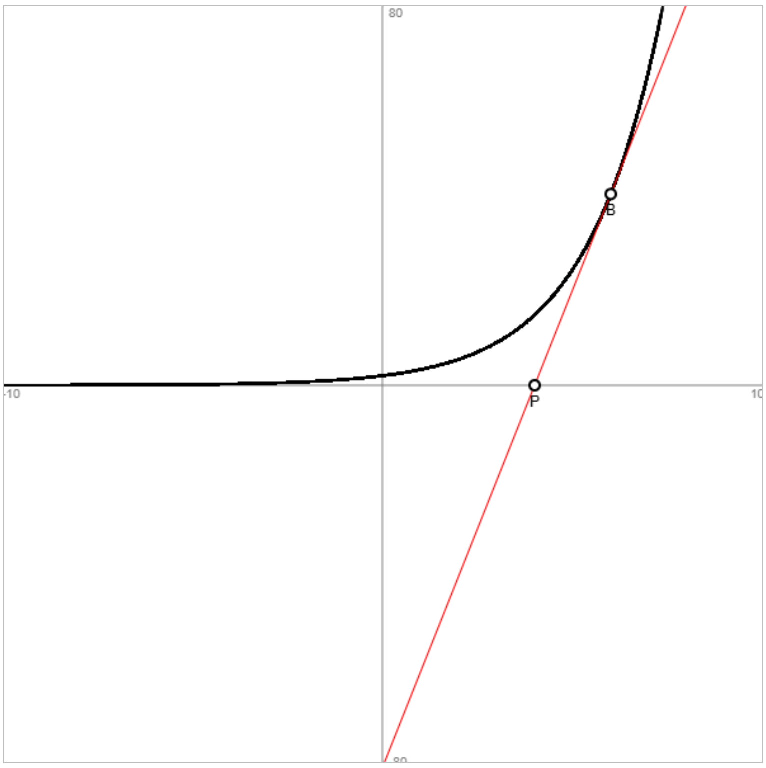
t: y = e^3(x-6) + $2e^3$ = e^3x – $6e^3$ + $2e^3$ = e^3x – $4e^3$

mit der Tangentenformal. Die Tangente verläuft durch den Punkt P(4|0).

IV. Alternativ lässt sich die <u>Tangente</u> mit Hilfe der Zweipunkteform berechnen:

P(4|0), B(6|$2e^3$) => t: y = $\frac{2e^3 - 0}{6-4}(x-4) + 0 = e^3(x-4)$ = e^3x – $4e^3$.

V. Die Graphen der Funktion f(x) = $2e^{0,5x}$ und der Tangente t: y = $e^3x - 4e^3$ sind nachstehend abgebildet:



www.michael-buhlmann.de / 11.2025 / Aufgabe 2528