Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Torus

Aufgabe: Gegeben ist im dreidimensionalen x-y-z-Koordinatensystem die Beziehung:

$$\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Benenne und skizziere den durch diese Beziehung entstehenden Körper.

Lösung: I. Wir stellen die Beziehung $\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4}$ (*) nach z um:

$$\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow z^2=\frac{1}{4}-\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$

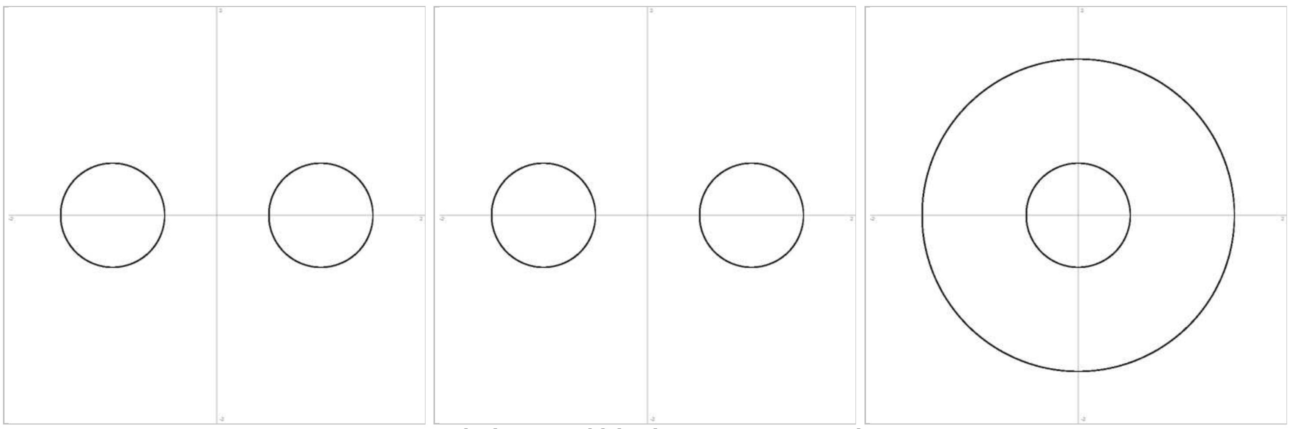
und haben damit eine Funktion z = f(x,y) = $\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$ mit zwei Funktionsästen.

II. Im dreidimensionalen x-y-z-Koordinatensystem werten wir die Beziehung (*) aus, indem wir den hinter (*) stehenden Körper mit den Grundebenen des Koordinatensystems schneiden. Es gilt dann:

<u>x=0</u> (y-z-Ebene): (*) $\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{0^2+y^2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{y^2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1-|y|\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$\left(|y|-1\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \;\text{->}\; \left\{\begin{matrix} (y-1)^2+z^2=\frac{1}{4} \\ (-y-1)^2+z^2=(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \;\text{->}\; \left\{\begin{matrix} (y-1)^2+(z-0)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ (y+1)^2+(z-0)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{matrix}\right..$$

Es liegen Kreisgleichungen vor. Wir erhalten damit zwei Kreise mit den Mittelpunkten $M_1(1|0)$ bzw. $M_2(-1|0)$ und den Radien $r_1 = r_2 = 0,5$.



Querschnitte von (*) in der y-z-, x-z-, x-y-Ebene

<u>y=0</u> (x-z-Ebene): (*) $\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{x^2+0^2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{x^2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1-|x|\right)^2+z^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

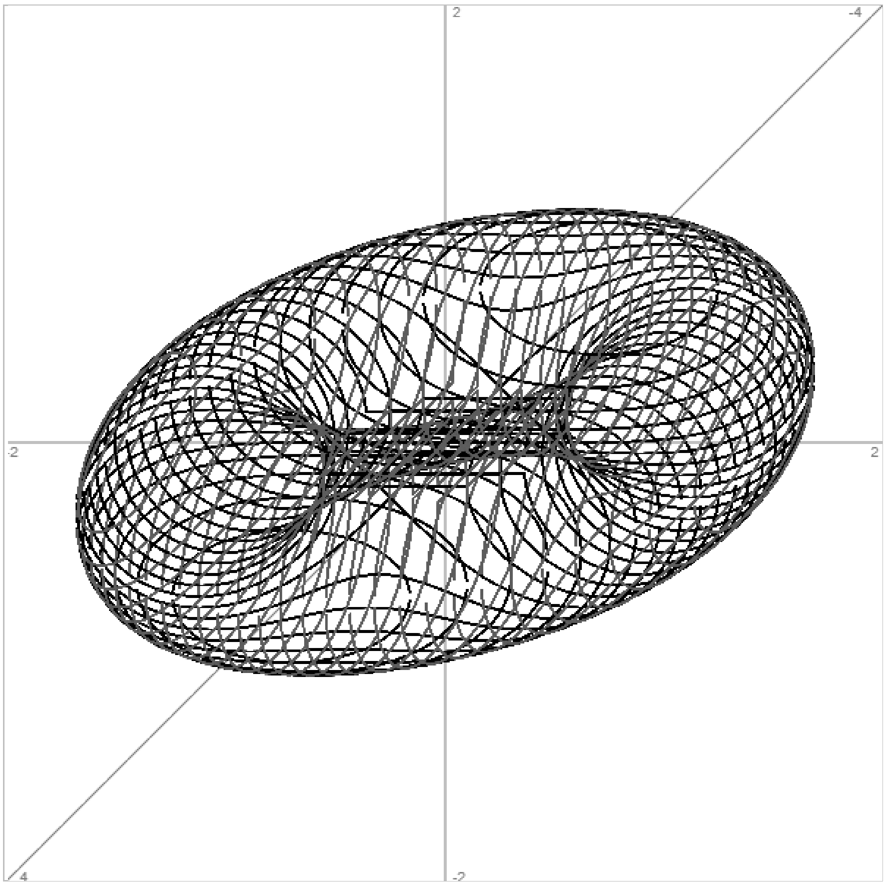
$$(|x|-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \;\text{->}\; \left\{ \begin{matrix} (x-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \\ (-x-1)^2 + z^2 = (x+1)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} \;\text{->}\; \left\{ \begin{matrix} (x-1)^2 + (z-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ (x+1)^2 + (z-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{matrix} \right. .$$

Wir erhalten zwei Kreise mit den Mittelpunkten $M_1(1|0)$ bzw. $M_2(-1|0)$ und den Radien $r_1 = r_2 = 0,5$.

<u>z=0</u> (x-y-Ebene): (*) $\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2+y^2} = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$1 \pm \frac{1}{2} = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2},\ \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{4},\ x^2+y^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$
$(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ (x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Wir erhalten zwei Kreise mit Mittelpunkt M(0|0) und den Radien $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1,5$.

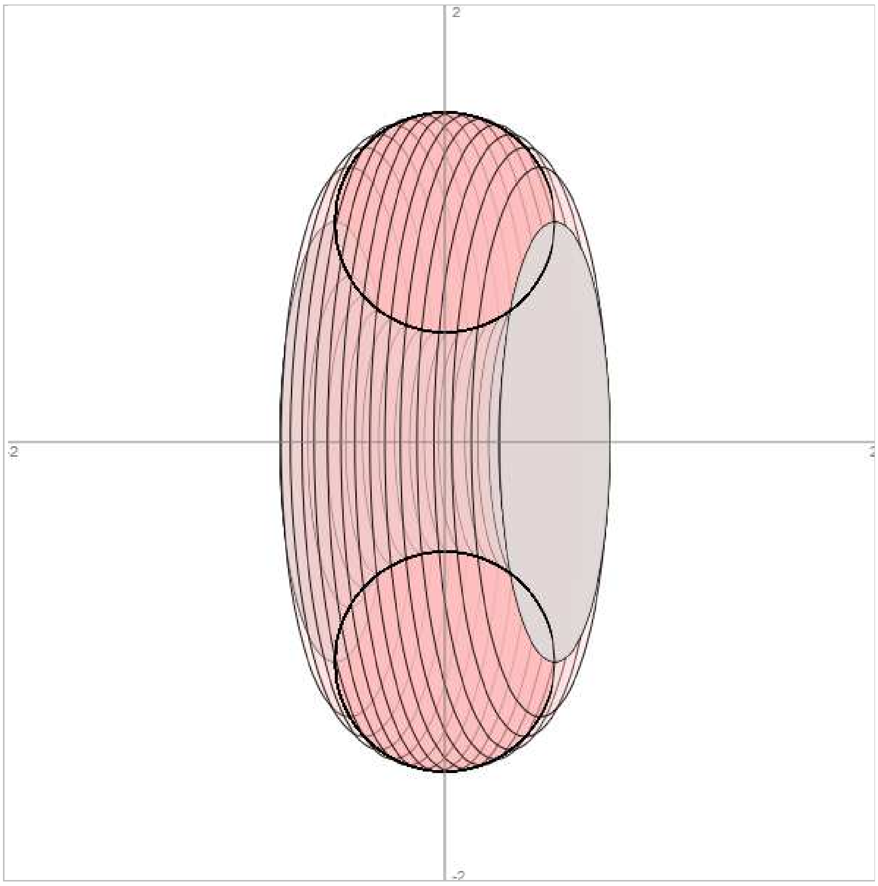
III. Die Querschnitte und die Tatsache, dass die Beziehung (*) letztlich einen zur z-Achse axialsymmetrischen (Rotations-) Körper darstellt, bei dem ein Kreis mit Radius r = 0,5 um die z-Achse rotiert, ergeben in der Gesamtschau einen <u>Torus</u> („Donut“) als Menge aller Punkte, die im Dreidimensionalen von einem Kreis mit Radius R = 1 den Abstand r = 0,5 haben.



IV. Auch innerhalb der eindimensionalen Analysis lässt sich der Torus als Rotationskörper z.B. um die x-Achse bilden. Gegeben sei dazu der Kreis mit Mittelpunkt M(0|1) und Radius r = 0,5, also:

$(x-0)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (y-1)^2 = \frac{1}{4} - x^2 \Leftrightarrow y-1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}-x^2} \Leftrightarrow$
$y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$.

Wir erhalten die beiden Funktionen $f_1(x) = 1+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$, $f_2(x) = 1-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$ für $-0,5 \le x \le 0,5$ mit $f_1(x) \ge f_2(x)$. Die Kreisfläche zwischen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ lassen wir dann um die x-Achse rotieren:



www.michael-buhlmann.de / 06.2021 / Aufgabe 1429