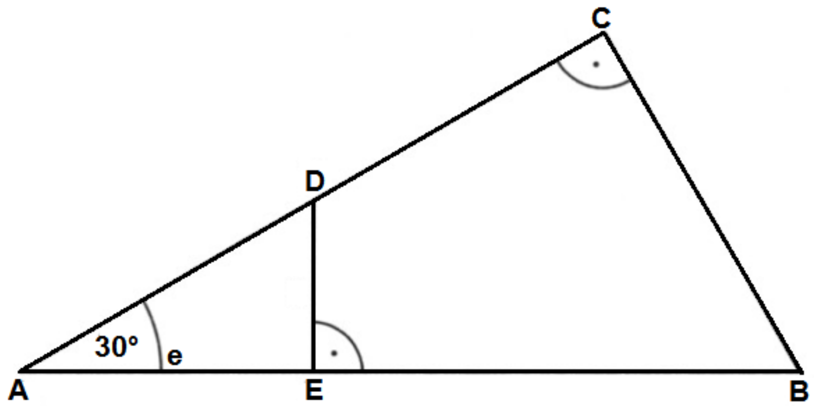
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Drei-/Viereck (exakte Berechnung)

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist D die Mitte der Seite zwischen A und C sowie e die Länge der Strecke zwischen A und E.



Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Flächeninhalt des Vierecks BCDE

$$A_{BCDE} = \frac{13}{18}e^2\sqrt{3}$$

beträgt.

Lösung: I. Die Formvariable e steht in der Geometrie und Trigonometrie für eine beliebige reelle Zahl, die die Grundlage einer geometrisch-trigonometrischen und daher exakten Formel bildet. Seitenlängen sind dabei Vielfache von e, Flächen Vielfache von e^2. Bei Anwendung von Trigonometrie und Satz des Pythagoras treten dann Ausdrücke vom Typ

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a \text{ (Wurzel und Quadrat)}$$

$$\sqrt{ae^2} = e\sqrt{a} = ne\sqrt{a_1} \text{ (teilweises Wurzelziehen)}$$

und

$$\frac{e}{\sqrt{a}} = \frac{e}{a}\sqrt{a} \text{ (Ganzrationalmachen des Nenners)}$$

auf. Im Bereich der trigonometrischen Funktionen sind die exakten Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für spezielle Winkel wichtig:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \ \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \ \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \ \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \ \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \tan 45° = 1, \ \tan 60° = \sqrt{3}$$

Zu beachten ist auch, dass ein 45°-Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auf ein gleichschenkliges Dreieck hinweist, ein 30°- oder 60°-Winkel auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Hälfte das Dreieck mit dem 30°- oder 60°-Winkel ist. Schließlich gelten noch in einem rechtwinkligen Dreieck die trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin\varphi = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\varphi = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\varphi = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

für Dreieckswinkel φ kleiner dem rechten Winkel.

II. Wir betrachten zunächst das rechtwinklige Dreieck ADE mit dem Winkel α = 30° bei der Ecke A und mit der Katheten $\overline{AE} = e$. Für die Berechnung der Hypotenuse im Dreieck verwenden wir den Kosinus mit:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Rightarrow \cos 30° = \frac{e}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{e}{\cos 30°} = \frac{e}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2e}{\sqrt{3}} = \frac{2e\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2e\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}e\sqrt{3}$$

(Umstellen, Ganzrationalmachen des Nenners). Zur Bestimmung der Seite $\overline{DE}$ im Dreieck ADE gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 \Rightarrow \overline{DE}^2 = \left(\frac{2}{3}e\sqrt{3}\right)^2 - e^2 = \frac{4}{9}e^2\cdot 3 - e^2 = \frac{4}{3}e^2 - e^2 = \frac{1}{3}e^2 \Rightarrow$$

$$\overline{DE} = \frac{e}{\sqrt{3}} = \frac{e\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{e\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}e\sqrt{3}.$$

III. Mit $\overline{AD} = \frac{2}{3}e\sqrt{3}$ gilt: $\overline{AC} = \frac{4}{3}e\sqrt{3}$, da der Punkt D in der Mitte der Seite $\overline{AC}$ im rechtwinkligen Dreieck ABC liegt. Wir berechnen die Seite $\overline{BC}$, indem wir wiederum den Winkel α = 30° sowie den Tangens im Dreieck ABC benutzen:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 30° = \frac{\overline{BC}}{\frac{4}{3}e\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{4}{3}e\sqrt{3}\cdot\tan 30° = \frac{4}{3}e\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}e$$

(Umstellen, Kürzen).

IV. Wir haben damit alle Katheten in den rechtwinkligen Dreiecken ABC und ADE bestimmt und können nun an die Berechnung des gesuchten Flächeninhalts des Vierecks BCDE gehen. Dieser ergibt sich als Differenz der Flächeninhalte des Dreiecks ABC und des Dreiecks ADE auf Grund der allgemeinen Flächeninhaltsformel für Dreiecke A = gh/2, hier mit den Katheten g und h:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}e\sqrt{3}\cdot\frac{4}{3}e = \frac{8}{9}e^2\sqrt{3}$$

$$A_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{DE} = \frac{1}{2}\cdot e\cdot\frac{1}{3}e\sqrt{3} = \frac{1}{6}e^2\sqrt{3}$$

$$A_{BCDE} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ADE} = \frac{8}{9}e^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}e^2\sqrt{3} = \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{6}\right)e^2\sqrt{3} = \left(\frac{16}{18} - \frac{3}{18}\right)e^2\sqrt{3} = \frac{13}{18}e^2\sqrt{3}$$

(Ausklammern, Differenz der Brüche ermitteln).

www.michael-buhlmann.de / 04.2017 / Aufgabe 335