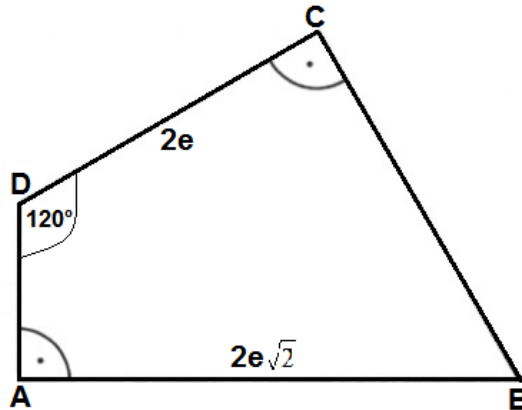


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Viereck (exakte Berechnung)

Aufgabe: Im Viereck ABCD ist die Seite zwischen A und B $2e\sqrt{2}$ lang, die Seite zwischen C und D $2e$. Rechte Winkel liegen an den Ecken A und C vor, für den Winkel an der Ecke D gilt: $\delta = 120^\circ$.



Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Umfang des Vierecks ABCD

$$u_{ABCD} = 2e(3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 1)$$

beträgt.

Lösung: I. Die Formvariable e steht in der Geometrie und Trigonometrie für eine beliebige reelle Zahl, die die Grundlage einer geometrisch-trigonometrischen und daher exakten Formel bildet. Seitenlängen sind dabei Vielfache von e , Flächen Vielfache von e^2 . Bei Anwendung von Trigonometrie und Satz des Pythagoras treten dann Ausdrücke vom Typ

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a \quad (\text{Wurzel und Quadrat})$$

$$\sqrt{ae^2} = e\sqrt{a} = ne\sqrt{a_1} \quad (\text{teilweises Wurzelziehen})$$

und

$$\frac{e}{\sqrt{a}} = \frac{e}{a} \sqrt{a} \quad (\text{Ganzrationalmachen des Nenners})$$

auf. Im Bereich der trigonometrischen Funktionen sind die exakten Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für spezielle Winkel wichtig:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

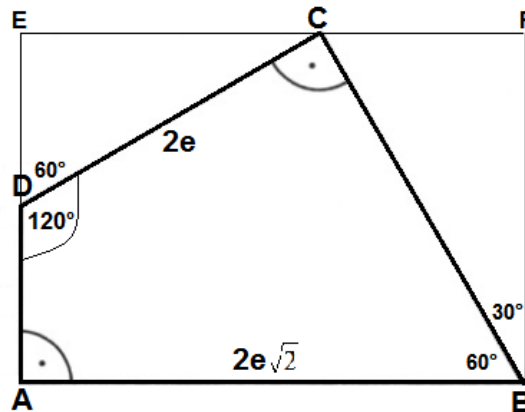
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan 45^\circ = 1, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Zu beachten ist auch, dass ein 45°-Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auf ein gleichschenkliges Dreieck hinweist, ein 30°- oder 60°-Winkel auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Hälfte das Dreieck mit dem 30°- oder 60°-Winkel ist. Schließlich gelten noch in einem rechtwinkligen Dreieck die trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

für Dreieckswinkel φ kleiner dem rechten Winkel.

II. Wir ergänzen zunächst das Viereck ABCD durch rechtwinklige Außendreiecke mit den zusätzlichen Ecken E und F:



Der Nebenwinkel bei D ist: $\delta_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, der Winkel β bei B errechnet sich auf Grund der Winkelsumme von 360° im Viereck als: $\beta = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, so dass der Winkel β_1 bei B $\beta_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ beträgt.

III. Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck CDE mit dem Winkel $\delta_1 = 60^\circ$ und der Hypotenuse $\overline{CD} = 2e$. Es gilt:

$$\sin \delta_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{\overline{CE}}{2e} \Rightarrow \overline{CE} = 2e \cdot \sin 60^\circ = 2e \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = e\sqrt{3}$$

$$\cos \delta_1 = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{\overline{DE}}{2e} \Rightarrow \overline{DE} = 2e \cdot \cos 60^\circ = 2e \cdot \frac{1}{2} = e.$$

IV. Für das rechtwinklige Dreieck BCF erhalten wir wegen

$$\overline{CF} = \overline{AB} - \overline{CE} = 2e\sqrt{2} - e\sqrt{3} = e(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

die Längen der Strecken \overline{BC} und \overline{BF} :

$$\sin \beta_1 = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{e(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{e(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sin 30^\circ} = \frac{e(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\frac{1}{2}} = 2e(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\overline{BF}}{2e(2\sqrt{2} - \sqrt{3})} \Rightarrow$$

$$\overline{BF} = 2e(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \cos 30^\circ = 2e(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = e(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = e(2\sqrt{6} - 3).$$

IV. Zur Berechnung des gesuchten Umfangs des Vierecks ABCD fehlt noch die Viereckseite \overline{AD} , die wir wie folgt bestimmen:

$$\overline{AD} = \overline{BF} - \overline{DE} = e(2\sqrt{6} - 3) - e = e(2\sqrt{6} - 3 - 1) = e(2\sqrt{6} - 4).$$

Damit ergibt sich für den Umfang:

$$u_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 2e\sqrt{2} + 2e(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 2e + 2e(\sqrt{6} - 2) = \\ 2e(\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{6} - 2) = 2e(3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 1)$$

und daher das gewünschte Resultat.

www.michael-buhlmann.de / 04.2017 / Aufgabe 336