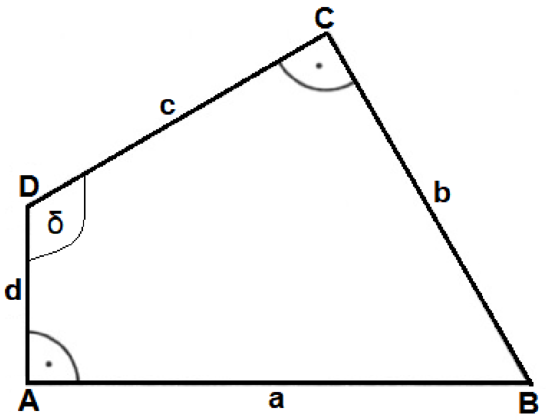
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Viereck

Aufgabe: Im Viereck ABCD sind die Seiten b = 7 cm, d = 3,3 cm lang, für den Winkel an der Ecke D gilt: δ = 118°. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Vierecks.



1. Lösung: I. Umfang und Fläche eines Vierecks ABCD lassen sich bestimmen, indem die geometrische Figur in rechtwinklige Dreiecke und Rechtecke unterteilt wird. Für die rechtwinkligen Dreiecke gelten dann die trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin\varphi = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\varphi = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\varphi = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

für Dreieckswinkel φ kleiner dem rechten Winkel sowie der Satz des Pythagoras:

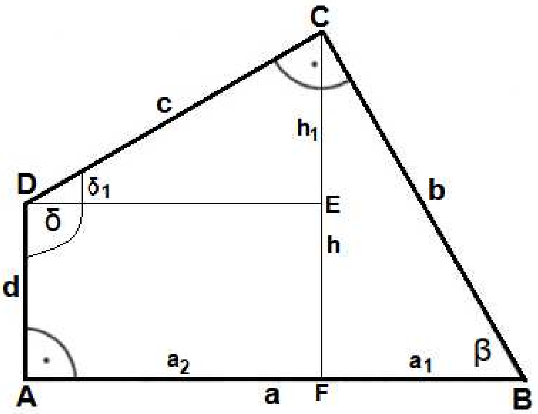
$$(An-)Kathete^2 + (Gegen-)Kathete^2 = Hypotenuse^2.$$

Für die Dreieckflächen gilt die Formel:

$$A_\Delta = \frac{(An-)Kathete \cdot (Gegen-)Kathete}{2};$$

zu beachten sind noch die Flächenformeln für Rechtecke und Trapeze ($A_R = a \cdot b$ [a als Rechtecklänge, b als Rechteckbreite], $A_T = (a+c)h/2$ [a, c als Trapezparallelen, h als Trapezhöhe). Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD ist die Summe der Flächeninhalte der durch die Einteilung des Vierecks entstandenen rechtwinkligen Dreiecke bzw. Rechtecke bzw. Trapeze, der Umfang des Vierecks ABCD mit den Seiten a, b, c, d ist: u = a + b + c + d.

II. Wir teilen zunächst das Viereck ABCD in rechtwinklige <u>Innendreiecke</u> und ein <u>Innenrechteck</u> mit Hilfe von zusätzlichen Punkten E und F ein:



Im Viereck ABCD gilt die Winkelsumme von 360°, so dass sich der Winkel an der Viereckecke B auf Grund der beiden rechten Winkel und des Winkels δ = 118° errechnet als:

β = 360° – 90° – 90° – 118° = 62°.

Wir verfügen damit im rechtwinkligen Dreieck BCF über einen bekannten Winkel (β = 62°) und eine bekannte Seite (b = 7 cm, Hypotenuse), so dass sich mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung:

$$\sin\beta = \frac{h}{b} \text{ => } \sin 62° = \frac{h}{7} \text{ => } h = 7 \cdot \sin 62° = 6{,}18 \text{ cm}$$

h = $\overline{CF}$ (Gegenkathete) errechnen lässt. Der Satz des Pythagoras liefert dann die dritte Seite (Kathete a_1) im Dreieck BCF:

$$a_1^2 = b^2 - h^2 = 7^2 - 6{,}18^2 = 10{,}81 \text{ => } a_1 = \sqrt{10{,}81} = 3{,}29 \text{ cm.}$$

Im Dreieck DEC erhalten wir die Seite h_1 = $\overline{CE}$ als:

h_1 = h – d = 6,18 – 3,3 = 2,88 cm.

Der Winkel δ_1 ist dort:

δ_1 = δ – 90° = 118° – 90° = 28°.

Auch im Dreieck DEC sind somit zwei Größen bekannt (h_1 = 2,88 cm, δ_1 = 28°), so dass beispielsweise die Anwendung des Tangens auf die Strecke a_2 = $\overline{AF}$:

$$\tan\delta_1 = \frac{h_1}{a_2} \text{ => } \tan 28° = \frac{2{,}88}{a_2} \text{ => } a_2 = \frac{2{,}88}{\tan 28°} = 5{,}42 \text{ cm}$$

ergibt. Mit dem Satz des Pythagoras errechnet sich die dritte Seite (Hypotenuse c) im Dreieck DEC als:

$$c^2 = a_2^2 + h_1^2 = 5{,}42^2 + 2{,}88^2 = 37{,}67 \text{ => } c = \sqrt{37{,}67} = 6{,}14 \approx 6{,}1 \text{ cm.}$$

III. Wir haben damit alle Informationen, um den Umfang des Vierecks ABCD zu ermitteln. Für die Seiten dieser geometrischen Figur gilt:

a = a_1 + a_2 = 3,29 + 5,42 = 8,71 ≈ 8,7 cm
b = 5,5 cm
c = 6,1 cm
d = 3,5 cm,

für den Umfang mithin:

u = a + b + c + d = 8,7 + 5,5 + 6,1 + 3,5 = 23,8 cm.

IV. Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD folgt aus den Flächeninhalten der beiden rechtwinkligen Dreiecke BCF und DEC sowie des Rechtecks AFED:

$A_{\Delta BCF} = a_1 h/2 = 3{,}29 \cdot 6{,}18/2 = 10{,}17 \approx 10{,}2 \text{ cm}^2$
$A_{\Delta DEC} = a_2 h_1/2 = 5{,}42 \cdot 2{,}88/2 = 7{,}8 \text{ cm}^2$
$A_{AFED} = a_2 d = 5{,}42 \cdot 3{,}3 = 17{,}89 \approx 17{,}9 \text{ cm}^2$,

woraus als Flächeninhalt des Vierecks:

$A = A_{\Delta BCF} + A_{\Delta DEC} + A_{AFED} = 10{,}2 + 7{,}8 + 17{,}9 = 35{,}9\ \text{cm}^2$
folgt.

2. Lösung: I. Umfang und Fläche eines Vierecks ABCD lassen sich bestimmen, indem die geometrische Figur durch rechtwinklige Außendreiecke ergänzt wird. Für die rechtwinkligen Dreiecke gelten dann die trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin\varphi = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\varphi = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\varphi = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

für Dreieckswinkel φ kleiner dem rechten Winkel sowie der Satz des Pythagoras:

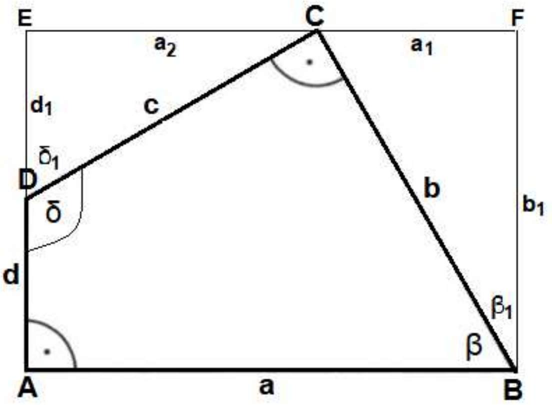
$$(An-)Kathete^2 + (Gegen-)Kathete^2 = Hypotenuse^2.$$

Für die Dreieckflächen gilt die Formel:

$$A_\Delta = \frac{(An-)Kathete \cdot (Gegen-)Kathete}{2};$$

zu beachten ist noch die Flächenformel für Rechtecke ($A_R = a \cdot b$ [a als Rechtecklänge, b als Rechteckbreite]). Der Flächeninhalt des Vierecks ABCD ist der Flächeninhalt des das Viereck umfassenden Rechtecks minus der Flächeninhalte der rechtwinkligen Außendreiecke, der Umfang des Vierecks ABCD mit den Seiten a, b, c, d ist: $u = a + b + c + d$.

II. Wir ergänzen zunächst das Viereck ABCD durch rechtwinklige Außendreiecke mit den zusätzlichen Ecken E und F:



Im Viereck ABCD gilt die Winkelsumme von 360°, so dass sich der Winkel an der Viereckecke B auf Grund der beiden rechten Winkel und des Winkels δ = 118° errechnet als:

β = 360° – 90° – 90° – 118° = 62°.

Der Nebenwinkel des Winkels β an der Ecke B ist:

β_1 = 90° – β = 90° – 62° = 28°.

Wir verfügen damit im rechtwinkligen Dreieck BFC über einen bekannten Winkel (β_1 = 28°) und eine bekannte Seite (b = 7 cm, Hypotenuse), so dass sich mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung:

$$\cos\beta_1 = \frac{b_1}{b} \Rightarrow \cos 28° = \frac{b_1}{7} \Rightarrow b_1 = 7 \cdot \cos 28° = 6{,}18\ \text{cm}$$

$b_1 = \overline{BF}$ (Ankathete) errechnen lässt. Der Satz des Pythagoras liefert dann die dritte Seite (Kathete a_1) im Dreieck BFC:

$$a_1^2 = b^2 - b_1^2 = 7^2 - 6{,}18^2 = 10{,}81 \Rightarrow a_1 = \sqrt{10{,}81} = 3{,}29\ \text{cm}.$$

Für das rechtwinklige Dreieck CED berechnen wir den Winkel:

δ_1 = 180° – δ = 180° – 118° = 62°

und die Seite $d_1 = \overline{DE}$:

$d_1 = b_1 - d = 6{,}18 - 3{,}3 = 2{,}88$ cm.

Auch im Dreieck CED sind somit zwei Größen bekannt (d_1 = 2,88 cm, δ_1 = 62°), so dass beispielsweise die Anwendung des Tangens auf die Strecke $a_2 = \overline{AF}$:

$$\tan\delta_1 = \frac{a_2}{d_1} \Rightarrow \tan 62° = \frac{a_2}{2{,}88} \Rightarrow a_2 = 2{,}88 \cdot \tan 62° = 5{,}42 \text{ cm}$$

ergibt. Mit dem Satz des Pythagoras errechnet sich die dritte Seite (Hypotenuse c) im Dreieck DEC als:

$$c^2 = a_2^2 + d_1^2 = 5{,}42^2 + 2{,}88^2 = 37{,}67 \Rightarrow c = \sqrt{37{,}67} = 6{,}14 \approx 6{,}1 \text{ cm.}$$

III. Wir haben damit alle Informationen, um den <u>Umfang</u> des Vierecks ABCD zu ermitteln. Für die Seiten dieser geometrischen Figur gilt:

$a = a_1 + a_2 = 3{,}29 + 5{,}42 = 8{,}71 \approx 8{,}7$ cm
b = 5,5 cm
c = 6,1 cm
d = 3,5 cm,

für den Umfang mithin:

u = a + b + c + d = 8,7 + 5,5 + 6,1 + 3,5 = 23,8 cm.

IV. Der <u>Flächeninhalt</u> des Vierecks ABCD folgt aus den Flächeninhalten der beiden rechtwinkligen Außendreiecke BFC und CED sowie des das Viereck umfassenden Rechtecks ABFE:

$A_{\Delta BFC} = a_1b_1/2 = 3{,}29\cdot 6{,}18/2 = 10{,}17 \approx 10{,}2$ cm^2
$A_{\Delta DEC} = a_2d_1/2 = 5{,}42\cdot 2{,}88/2 = 7{,}8$ cm^2
$A_{ABFE} = ab_1 = 8{,}71\cdot 6{,}18 = 53{,}83 \approx 53{,}8$ cm^2.

Wir berechnen den gesuchten Flächeninhalt für das Viereck ABCD als:

$A = A_{ABFE} - A_{\Delta BFC} - A_{\Delta DEC} = 53{,}8 - 10{,}2 - 7{,}8 = 35{,}8$ cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 10.2017 / Aufgabe 516