

Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ sind die Katheten $a = 3$ cm und $b = 10$ cm gegeben ($\gamma = 90^\circ$). Berechne die fehlenden Größen, den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

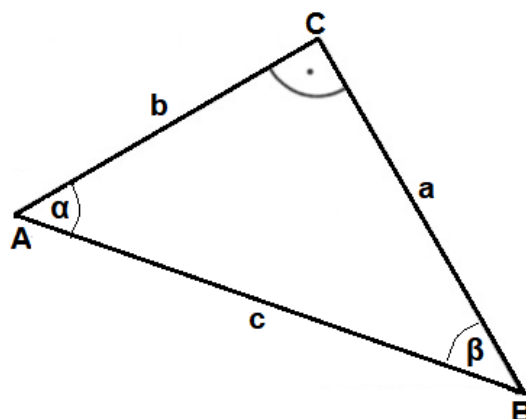
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Nach dem Satz des Pythagoras gilt im Dreieck $\triangle ABC$ mit den Katheten $a = 3 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ für die Hypotenuse c :

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 100 = 109 \Rightarrow c = \sqrt{109} = 10,44 \approx 10,4 \text{ cm}.$$

Der Winkel α lässt sich z.B. berechnen mit Hilfe des Sinus (als Gegenkathete geteilt durch Hypotenuse; auch Kosinus oder Tangens wären möglich, da alle Seiten des Dreiecks bekannt sind):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{10,44} = 0,2874 \Rightarrow \alpha = 16,7^\circ.$$

Dann gilt für den Winkel β (letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel $\gamma = 90^\circ$):

$$\beta = 90^\circ - 16,7^\circ = 73,3^\circ.$$

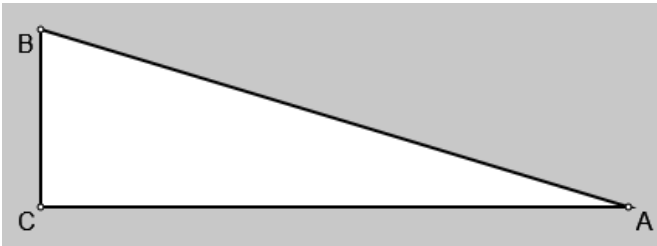
III. Für den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt:

$$u = a + b + c = 3 + 10 + 10,4 = 23,4 \text{ cm}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ errechnet sich mit den Katheten $a = 3 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 = 15 \text{ cm}^2.$$

IV. Zeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 11.2017 / Aufgabe 537