Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist die Hypotenuse c = 8 cm sowie der Winkel β = 40,5° gegeben (γ = 90°). Berechne die fehlenden Größen, den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

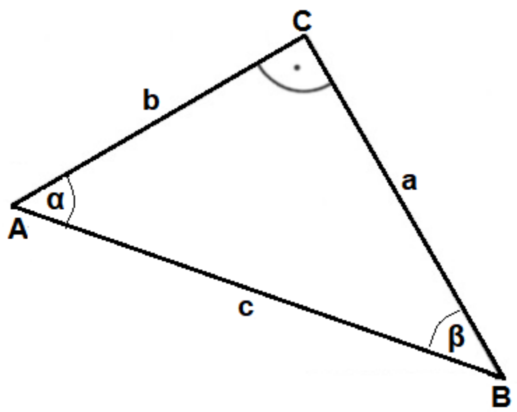
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Der Winkel α errechnet sich aus dem Winkel β = 40,5° (und letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel γ = 90°) als:

α = 90° – β = 90° – 40,5° = 49,5°.

Wir berechnen die Seite b mit Hilfe des Sinus (als Gegenkathete geteilt durch Hypotenuse) und des Winkels β = 40,5° sowie der Hypotenuse c = 8 cm und erhalten:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \sin 40{,}5° = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 8 \cdot \sin 40{,}5° = 5{,}2 \text{ cm.}$$

Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der noch fehlenden Kathete a ermitteln. Es gilt:

$$a^2 = c^2 - b^2 = 8^2 - 5{,}2^2 = 36{,}96 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{36{,}96} = 6{,}08 \approx 6{,}1 \text{ cm.}$$

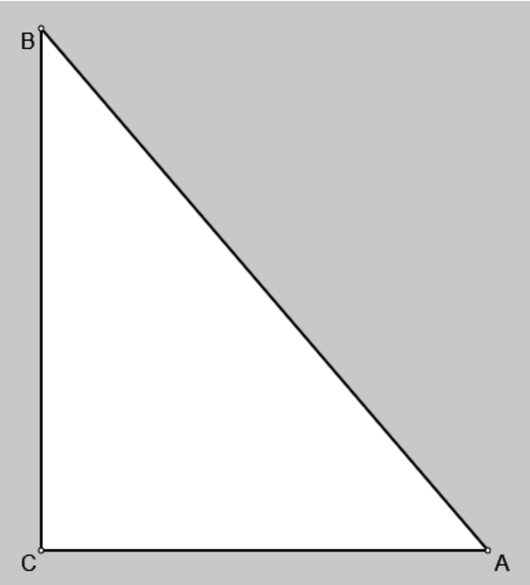
III. Für den Umfang des Dreiecks ΔABC gilt:

u = a + b + c = 6,1 + 5,2 + 8 = 19,3 cm.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC errechnet sich mit den Katheten a = 6,1 cm, b = 5,2 cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6{,}1 \cdot 5{,}2 = 15{,}86 \text{ cm}^2.$$

IV. Zeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 11.2017 / Aufgabe 538