Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist die Kathete a = 12,4 cm sowie der Winkel β = 23,8° gegeben (γ = 90°). Berechne die fehlenden Größen, den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

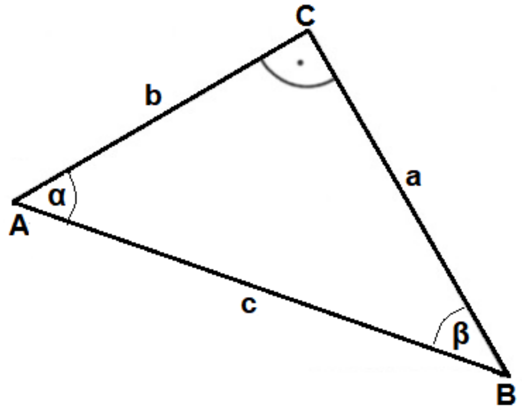
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Der Winkel α errechnet sich aus dem Winkel $\beta = 23{,}8°$ (und letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel $\gamma = 90°$) als:

$\alpha = 90° - \beta = 90° - 23{,}8° = 66{,}2°$.

Wir berechnen die Seite, die Hypotenuse c mit Hilfe des Kosinus (als Ankathete geteilt durch Hypotenuse) und des Winkels $\beta = 23{,}8°$ sowie der Kathete a = 12,4 cm und erhalten:

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \cos 23{,}8° = \frac{12{,}4}{c} \Rightarrow c \cdot \cos 23{,}8° = 12{,}4 \Rightarrow c = \frac{12{,}4}{\cos 23{,}8°} = 13{,}55 \approx 13{,}6 \text{ cm.}$$

Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der noch fehlenden Kathete b ermitteln. Es gilt:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 13{,}55^2 - 12{,}4^2 = 29{,}84 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{29{,}84} = 5{,}46 \approx 5{,}5 \text{ cm.}$$

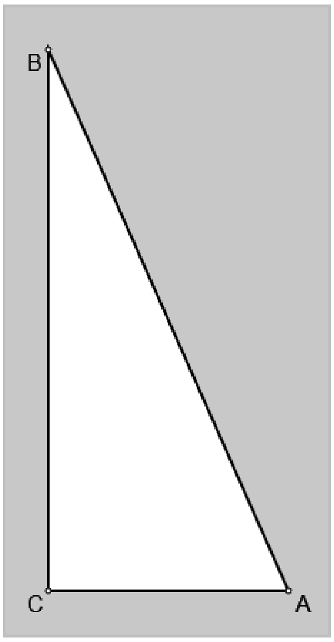
III. Für den Umfang des Dreiecks ΔABC gilt:

u = a + b + c = 12,4 + 5,5 + 13,6 = 31,5 cm.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC errechnet sich mit den Katheten a = 12,4 cm, b = 5,5 cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12{,}4 \cdot 5{,}5 = 34{,}1 \text{ cm}^2.$$

IV. Zeichnung:



www.michael-buhlmann.de / 11.2017 / Aufgabe 539