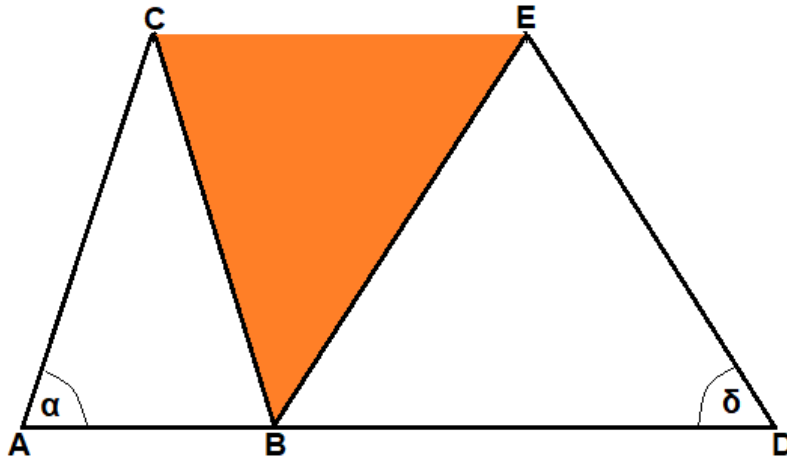


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Gleichschenklige Dreiecke

Aufgabe: Die gleichschenkligen Dreiecke ABC und BDE besitzen die gleiche Höhe. Weiter gilt: $\alpha = 74,2^\circ$, $\overline{BE} = 10,3 \text{ cm}$, $\delta = 56,7^\circ$.



Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCE.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α , β , γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α , β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

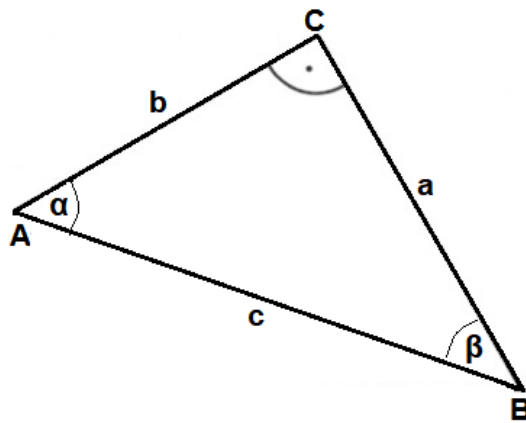
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

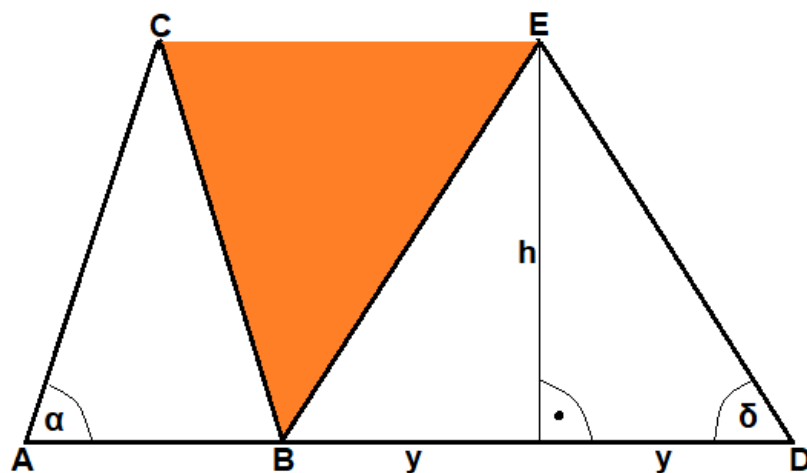
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Im gleichschenkligen Dreieck BDE gilt: $\delta = 56,7^\circ$, $\overline{BE} = \overline{DE} = 10,3$ cm. Wir halbieren das Dreieck durch die Höhe h und erhalten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h und y sowie der Hypotenuse \overline{DE} .



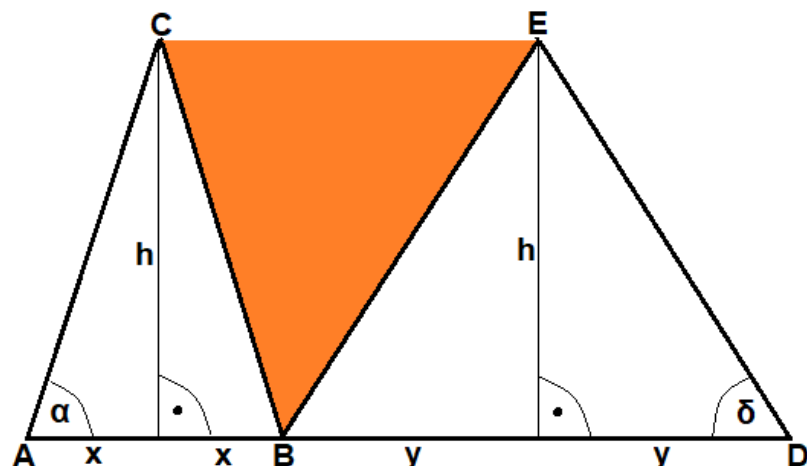
Die Höhe h berechnen wir mit dem Winkel $\delta = 56,7^\circ$ und dem Sinus und erhalten:

$$\sin \delta = \frac{h}{DE} \Rightarrow \sin 56,7^\circ = \frac{h}{10,3} \Rightarrow h = 10,3 \cdot \sin 56,7^\circ = 8,61 \text{ cm.}$$

Die Kathete y ermittelt sich mit dem Satz des Pythagoras und damit als:

$$y^2 = \overline{DE}^2 - h^2 \Rightarrow y^2 = 10,3^2 - 8,61^2 = 31,96 \Rightarrow y = 5,65 \text{ cm.}$$

III. Im gleichschenkligen Dreieck ABC kennen wir die Höhe h , die nach Voraussetzung Höhe beider gleichschenkliger Dreiecke ist. Wir halbieren das Dreieck ABC durch die Höhe h und erhalten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten h und x (und der Hypotenuse \overline{AC}) und dem Winkel α .

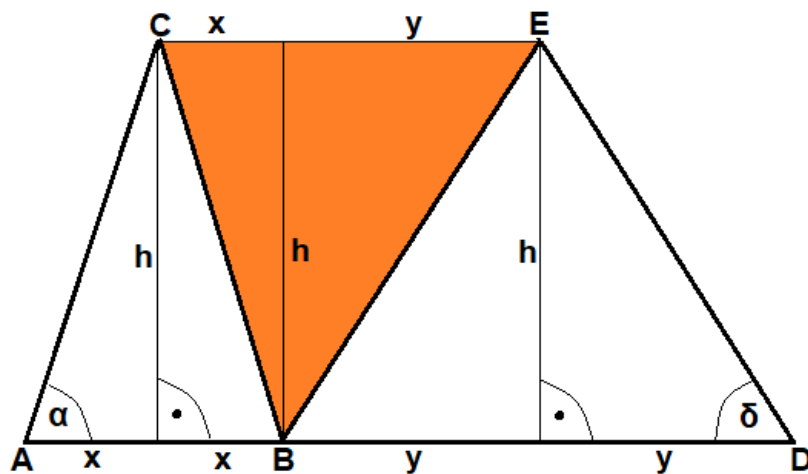


Wir bestimmen mit Hilfe des Winkels $\alpha = 74,2^\circ$ und mit dem Tangens:

$$\tan \alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow \tan 74,2^\circ = \frac{8,61}{x} \Rightarrow x = \frac{8,61}{\tan 74,2^\circ} = 2,44 \text{ cm.}$$

IV. Im Dreieck BCE ermitteln wir als Grundseite:

$$g = \overline{CE} = x + y = 2,44 + 5,65 = 8,09 \text{ cm.}$$



Die Höhe des Dreiecks BCE ist die Höhe der gleichschenkligen Dreiecke:

$$h = 8,61 \text{ cm.}$$

Gemäß der Flächenformel $A = \frac{1}{2} gh$ für beliebige Dreiecke gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks BCE:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8,09 \cdot 8,61 = 34,83 \approx 34,8 \text{ cm}^2,$$

womit die gesuchte Größe berechnet wurde.