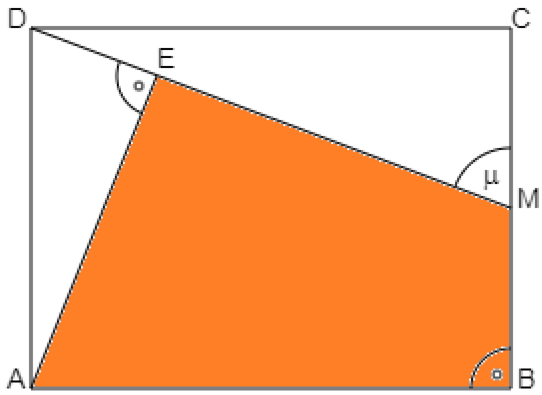
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Viereckflächeninhalt

Aufgabe: Im Rechteck ABCD ist M die Mitte der Seite $\overline{BC}$, der Winkel μ = 69,4°. Zudem gilt: $\overline{AE}$ = 5,6 cm. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABME.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

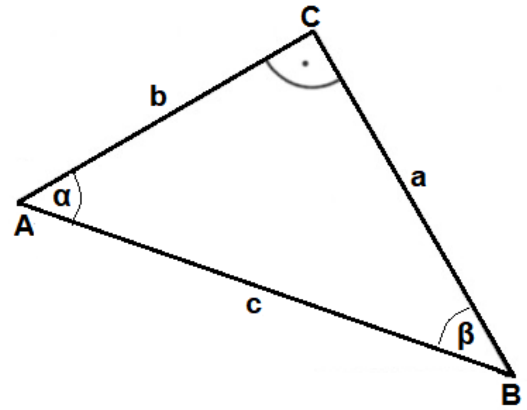
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

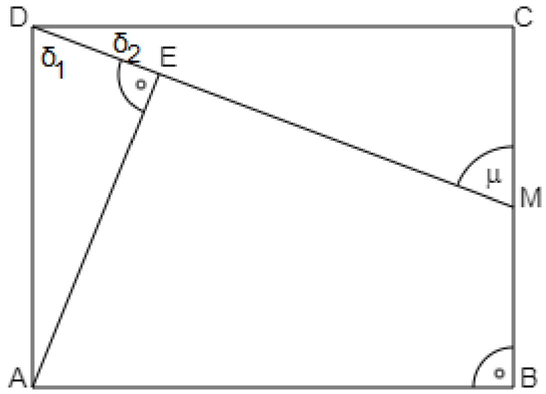
u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Wir betrachten zunächst das Dreieck ΔAED mit rechtem Winkel an der Ecke E. Der Winkel δ_1 an der Ecke D ist der Winkel $\delta_1 = \mu = 69{,}4°$, weil $\delta_2 = 90° - 69{,}4° = 20{,}6°$ und $\delta_1 + \delta_2 = 90°$ ist.



Da die Gegenkathete $\overline{AE}$ = 5,6 cm bekannt ist, lässt sich die Hypotenuse $\overline{AD}$ mit dem Sinus berechnen:

$$\sin\delta_1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Rightarrow \sin 69{,}4° = \frac{5{,}6}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{5{,}6}{\sin 69{,}4°} = 6 \text{ cm.}$$

Die Hypotenuse $\overline{AD}$ ist aber die Breite des Rechtecks ABCD. Wir bestimmen nun noch die Kathete $\overline{DE}$ im Dreieck AED zwecks späterer Berechnung des Flächeninhalts. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 = 6^2 - 5{,}6^2 = 4{,}64 \Rightarrow \overline{DE} = 2{,}15 \text{ cm.}$$

III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔMCD ist nun:

$$\overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3 \text{ cm,}$$

so dass wir mit dem Winkel $\delta_2 = 20{,}6°$ die Rechtecklänge als Ankathete $\overline{CD}$ vermöge des Tangens bestimmen können:

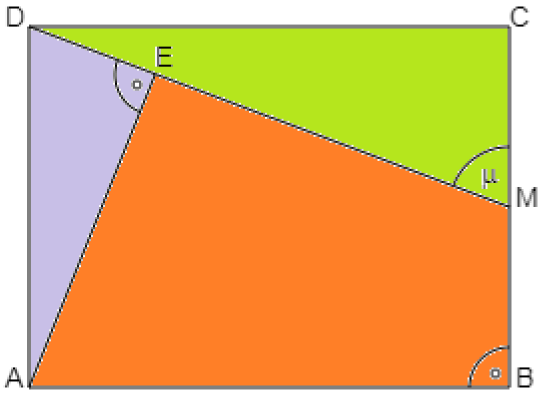
$$\tan\delta_2 = \frac{\overline{MC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \tan 20{,}6° = \frac{3}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{3}{\tan 20{,}6°} = 8 \text{ cm.}$$

IV. Der Flächeninhalt des Vierecks ABME ist der des Rechtecks ABCD, vermindert um die Flächeninhalte der beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔAED und ΔMCD. Es gilt:

$A_{ABCD} = \overline{CD}\cdot\overline{AD} = 8\cdot 6 = 48 \text{ cm}^2$,

$A_{AED} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{DE} = \frac{1}{2}\cdot 5{,}6\cdot 2{,}15 = 6{,}02 \approx 6 \text{ cm}^2$,

$A_{MCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{MC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ cm².



Der gesuchte Viereckflächeninhalt ist dann:

$A_{ABME} = A_{ABCD} - A_{AED} - A_{MCD} = 48 - 6 - 12 = 30$ cm².

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 774