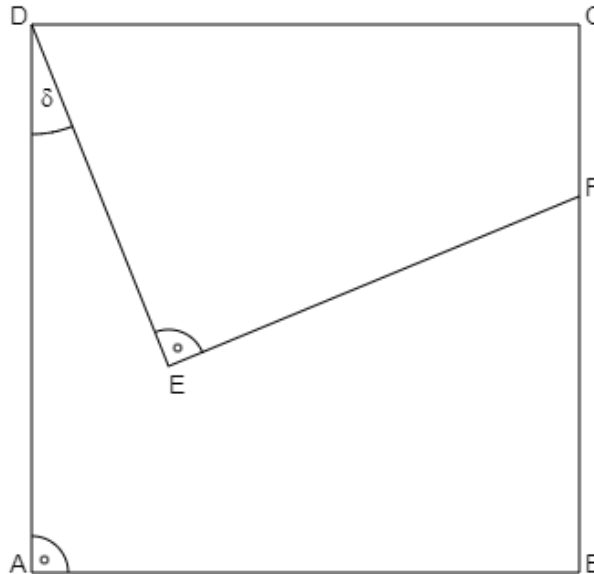


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Viereckumfang

Aufgabe: Die Seitenlänge des Quadrats ABCD beträgt 8 cm. Im Quadrat ist die Strecke $\overline{DE} = 5,4$ cm, der Winkel $\delta = 21,8^\circ$. Berechne den Umfang des Vierecks CDEF.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta, \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

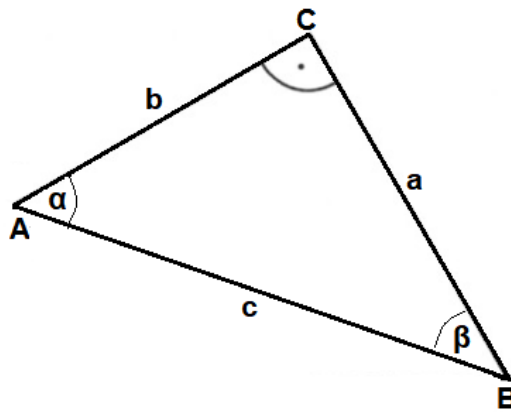
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \alpha = 90^\circ - \beta, \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

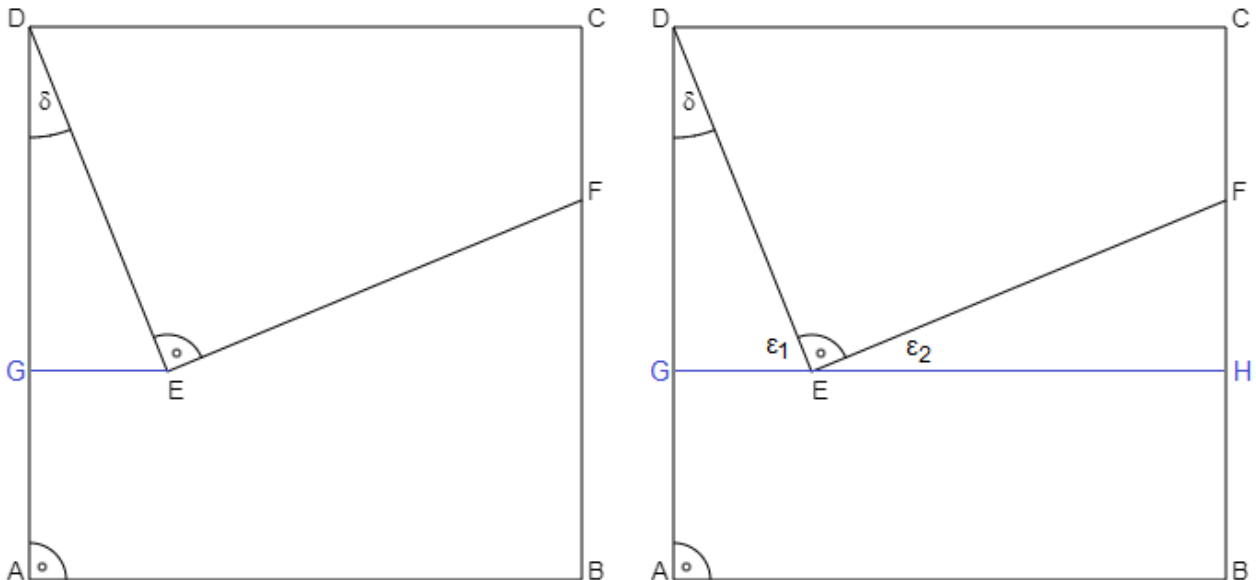
$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Wir betrachten zunächst im Quadrat das Dreieck $\triangle DGE$ mit rechtem Winkel an der Ecke G. Mit dem Winkel $\delta = 21,8^\circ$ und der Hypotenuse $\overline{DE} = 5,4$ cm ergeben sich die Dreieckseiten \overline{DG} und \overline{EG} wie folgt:

$$\sin \delta = \frac{\overline{EG}}{\overline{DE}} \Rightarrow \sin 21,8^\circ = \frac{\overline{EG}}{5,4} \Rightarrow \overline{EG} = 5,4 \cdot \sin 21,8^\circ = 2 \text{ cm}$$

$$\cos \delta = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} \Rightarrow \cos 21,8^\circ = \frac{\overline{DG}}{5,4} \Rightarrow \overline{DG} = 5,4 \cdot \cos 21,8^\circ = 5 \text{ cm}.$$



III. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle EHF$ ist der Winkel $\varepsilon_2 = \delta = 21,8^\circ$ wegen: $\varepsilon_1 = 90^\circ - \delta = 90^\circ - 21,8^\circ = 68,2^\circ$ und $\varepsilon_2 = 180^\circ - 90^\circ - \varepsilon_1 = 90^\circ - 68,2^\circ = 21,8^\circ$. Zudem ist Quadratseite $\overline{AB} = 8$ cm lang.

Die Kathete \overline{EH} im Dreieck $\triangle EHF$ hat somit die Länge:

$$\overline{EH} = \overline{AB} - \overline{EG} = 8 - 2 = 6 \text{ cm}.$$

Die Länge der Gegenkathete \overline{FH} zum Winkel $\varepsilon_2 = 21,8^\circ$ errechnet sich nun mit dem Tangens als:

$$\tan \varepsilon_2 = \frac{\overline{FH}}{\overline{EH}} \Rightarrow \tan 21,8^\circ = \frac{\overline{FH}}{6} \Rightarrow \overline{FH} = 6 \cdot \tan 21,8^\circ = 2,4 \text{ cm}.$$

Weiter ergibt sich die Hypotenuse \overline{EF} im rechtwinkligen Dreieck nach dem Satz des Pythagoras, also mit:

$$\overline{EF}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{FH}^2 = 6^2 + 2,4^2 = 41,76 \Rightarrow \overline{AF} = \sqrt{41,76} = 6,46 \approx 6,5 \text{ cm.}$$

Mit \overline{EF} erhalten wir neben der vorgegebenen Seite \overline{DE} eine weitere Seite des Vierecks CDEF.

IV. Zur Bestimmung der Seite \overline{CF} des Vierecks CDEF ist zunächst \overline{BH} gemäß:

$$\overline{BH} = \overline{AG} = \overline{AD} - \overline{DG} = 8 - 5 = 3 \text{ cm}$$

zu bestimmen. Weiter ist:

$$\overline{BF} = \overline{BH} + \overline{FH} = 3 + 2,4 = 5,4 \text{ cm}$$

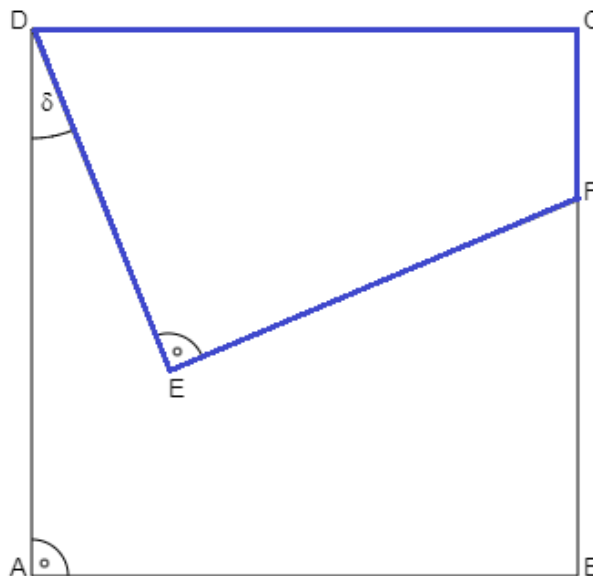
und schließlich wegen der Quadratseite $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$:

$$\overline{CF} = \overline{BC} - \overline{BF} = 8 - 5,4 = 2,6 \text{ cm.}$$

V. Die Quadratseite $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$ komplettiert als letzte Seite des Vierecks CDEF den gesuchten Umfang, so dass

$$u = \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FC} = 8 + 5,4 + 6,5 + 2,6 = 22,5 \text{ cm}$$

gilt.



Der gesuchte Umfang beträgt:

$$u = 22,5 \text{ cm.}$$