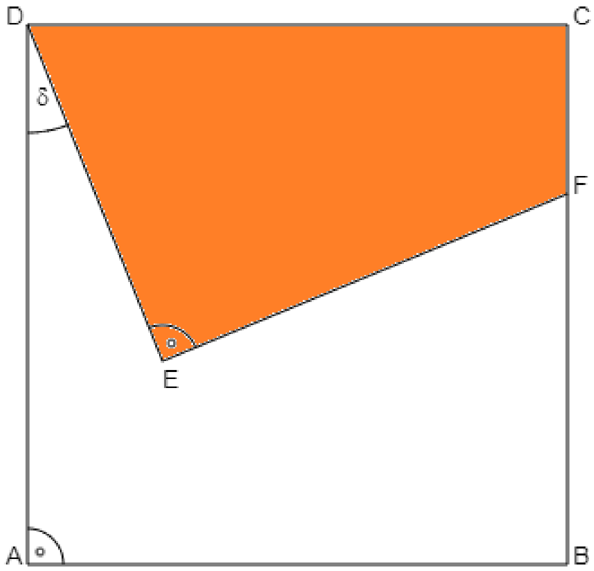
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Viereckflächeninhalt

Aufgabe: Die Seitenlänge des Quadrats ABCD beträgt 8 cm. Im Quadrat ist die Strecke $\overline{DE}$ = 5,4 cm, der Winkel δ = 21,8°. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks CDEF.



Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

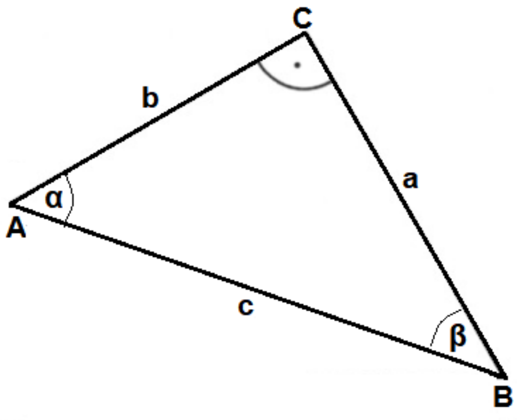
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

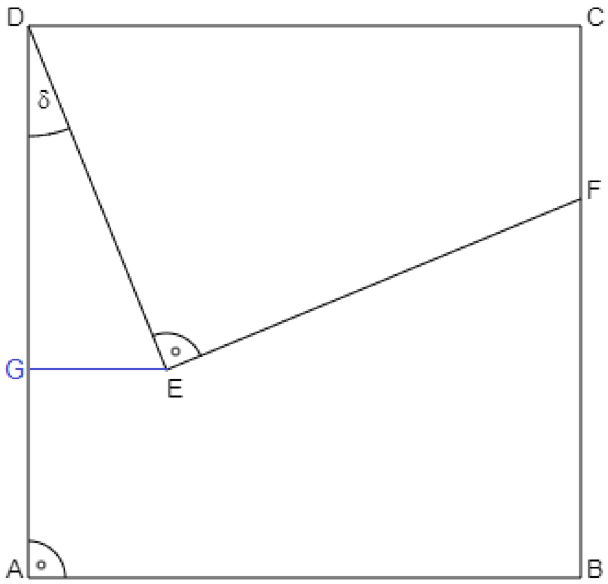
$$A = \frac{1}{2}ab\,.$$

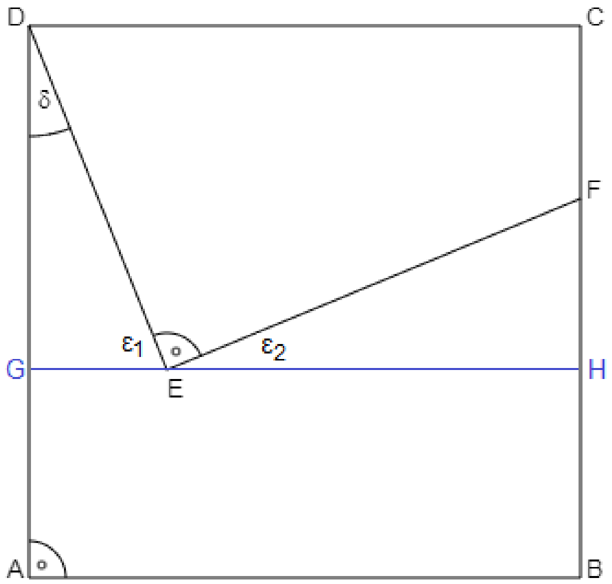


II. Wir betrachten zunächst im Quadrat das Dreieck ΔDGE mit rechtem Winkel an der Ecke G. Mit dem Winkel δ = 21,8° und der Hypotenuse $\overline{DE}$ = 5,4 cm ergeben sich die Dreieckseiten $\overline{DG}$ und $\overline{EG}$ wie folgt:

$$\sin\delta = \frac{\overline{EG}}{\overline{DE}} \Rightarrow \sin 21{,}8° = \frac{\overline{EG}}{5{,}4} \Rightarrow \overline{EG} = 5{,}4 \cdot \sin 21{,}8° = 2 \text{ cm}$$

$$\cos\delta = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}} \Rightarrow \cos 21{,}8° = \frac{\overline{DG}}{5{,}4} \Rightarrow \overline{DG} = 5{,}4 \cdot \cos 21{,}8° = 5 \text{ cm.}$$





III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔEHF ist der Winkel ε_2 = δ = 21,8° wegen: ε_1 = 90° – δ = 90° – 21,8° = 68,2° und ε_2 = 180° – 90° – ε_1 = 90° – 68,2° = 21,8°. Die Quadratseite ist $\overline{AB}$ = 8 cm lang. Die Kathete $\overline{EH}$ im Dreieck ΔEHF hat somit die Länge:

$\overline{EH} = \overline{AB} - \overline{EG}$ = 8 – 2 = 6 cm.

Die Länge der Gegenkathete $\overline{FH}$ zum Winkel ε_2 = 21,8° errechnet sich nun mit dem Tangens als:

$$\tan\varepsilon_2 = \frac{\overline{FH}}{\overline{EH}} \Rightarrow \tan 21{,}8° = \frac{\overline{FH}}{6} \Rightarrow \overline{FH} = 6 \cdot \tan 21{,}8° = 2{,}4 \text{ cm.}$$

IV. Wir berechnen nun noch die Länge $\overline{AG}$ als:

$\overline{AG} = \overline{AD} - \overline{DG}$ = 8 – 5 = 3 cm.
und haben damit alle für die Ermittlung des gesuchten Viereckeckflächeninhalts nötigen Größen gefunden.

V. Der Flächeninhalt des Vierecks CDEF errechnet sich als Differenz von Quadratflächeninhalt minus den Flächeninhalten der Dreiecke ΔDGE und ΔEHF sowie des Rechtecks ABHG:

$A_{CDEF} = A_{ABCD} - A_{DGE} - A_{EHF} - A_{ABHG}$

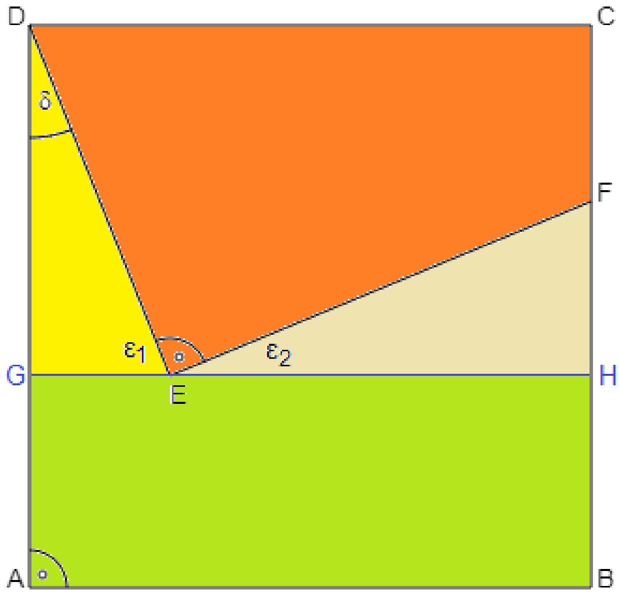
mit:

$A_{ABCD} = 8^2 = 64$ cm^2

$A_{DGE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DG} \cdot \overline{EG} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ cm^2

$A_{EHF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EH} \cdot \overline{FH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}4 = 7{,}2$ cm^2

$A_{ABHG} = \overline{AB} \cdot \overline{AG} = 8 \cdot 3 = 24$ cm^2.



Damit beträgt der gesuchte Flächeninhalt:

$A_{CDEF} = 64 - 5 - 7{,}2 - 24 = 27{,}8$ cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 777