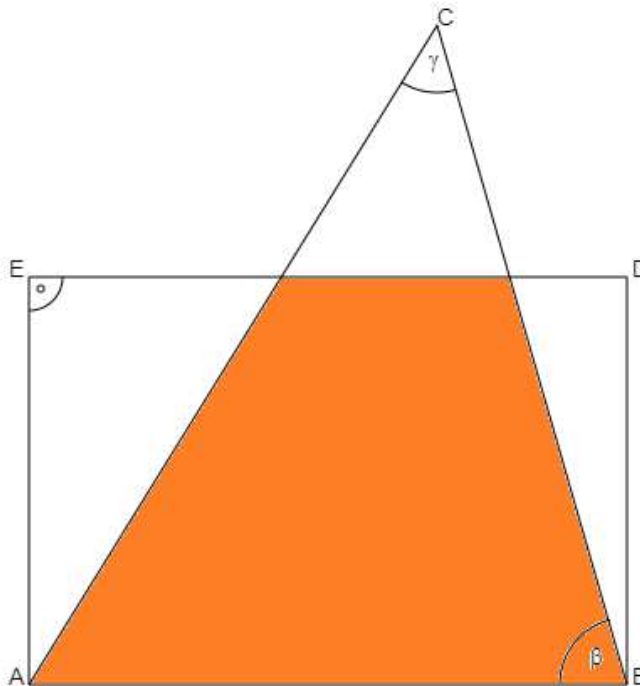


# Mathematikaufgaben

## > Geometrie/Trigonometrie

### > Trapezflächeninhalt

**Aufgabe:** Das Rechteck ABDE und das Dreieck ABC haben die Seite  $\overline{AB}$  gemeinsam. Im Dreieck gilt:  $\beta = 74,1^\circ$ ,  $\gamma = 47,7^\circ$ ,  $\overline{AC} = 12,3$  cm. Zudem gilt:  $\overline{AE} = 6,5$  cm. Berechne den Inhalt der Fläche, die das Dreieck ABC innerhalb des Rechtecks ABDE einnimmt.



**Lösung:** I. In einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bei  $\gamma = 90^\circ$  heißen  $a$  und  $b$  Katheten,  $c$  Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $a$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $b$ ), die Kathete, die an einem Winkel  $\alpha$  oder  $\beta$  liegt, heißt Ankathete (bei Winkel  $\alpha$  Seite  $b$ , bei Winkel  $\beta$  Seite  $a$ ). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma = 90^\circ$  gelten noch die Beziehungen:

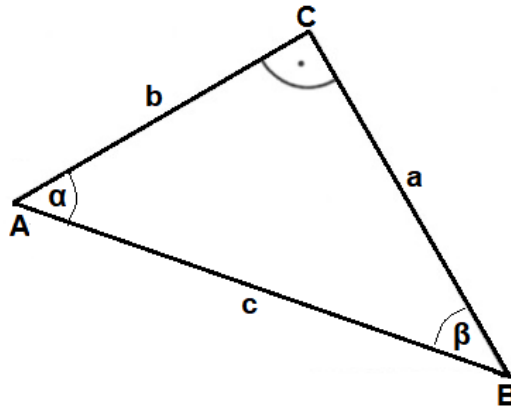
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \alpha = 90^\circ - \beta, \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

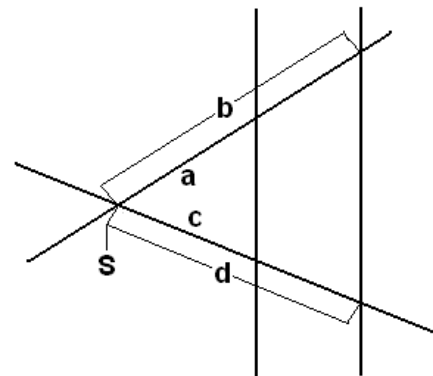
$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Es gelten die Strahlensätze, wenn zwei von einem Strahlencentrum S ausgehende Geraden von zwei parallelen Geraden geschnitten werden:

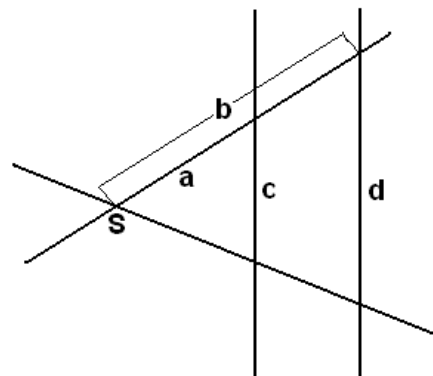
1. Strahlensatz:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  bzw.  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für jeweils zwei bei S beginnende Strecken a und b auf dem ersten sowie c und d auf dem zweiten Geradenstrahl.



2. Strahlensatz:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  bzw.  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

für die zwei bei S beginnenden Strecken a und b auf einem Geradenstrahl sowie die Strecken c und d auf den Parallelen.



III. Der zu bestimmende Flächeninhalt ist der eines Trapezes. Die Trapezhöhe ist mit  $h_{Tr} = \overline{AE} = 6,5 \text{ cm}$  bekannt. Zu bestimmen sind im Folgenden also die parallelen Seiten  $a_{Tr}$  und  $c_{Tr}$  des Trapezes.

IV. Wir betrachten das allgemeine Dreieck  $\triangle ABC$ , das wir mit der Dreieckshöhe  $h = \overline{CF}$  als Abstand der Ecke C von der Seite  $\overline{AB}$  in zwei rechtwinklige Dreiecke  $\triangle AFC$  und  $\triangle BCF$  mit jeweils rechtem Winkel an der Ecke F unterteilen.

V. Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle AFC$  ist der Winkel  $\alpha$  an der Ecke A gemäß der Winkelsumme im

Dreieck:

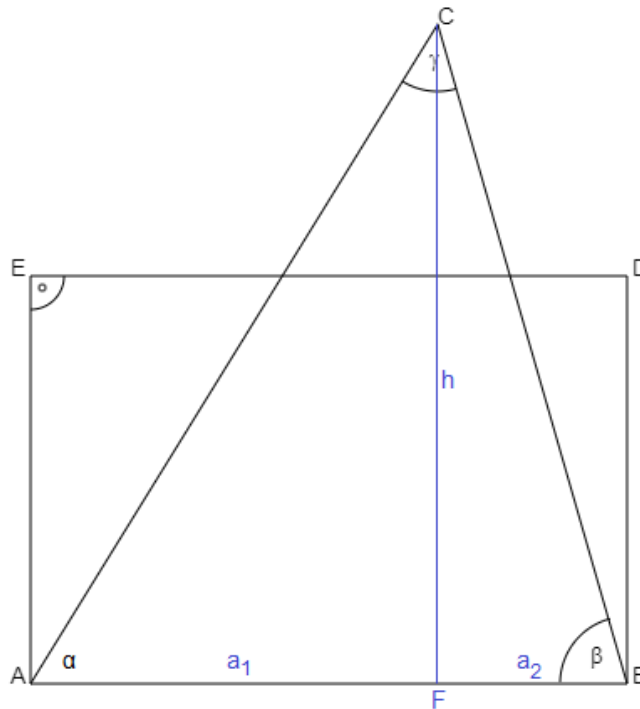
$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 74,1^\circ - 47,7^\circ = 58,2^\circ.$$

Die Höhe  $h = \overline{CF}$  errechnet sich mit dem Winkel  $\alpha$  und dem Sinus:

$$\sin \alpha = \frac{h}{AC} \Rightarrow \sin 58,2^\circ = \frac{h}{12,3} \Rightarrow h = 12,3 \cdot \sin 58,2^\circ = 10,45 \approx 10,5 \text{ cm.}$$

Die Seite  $a_1 = \overline{AF}$  ermitteln wir mit dem Kosinus:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{AC} \Rightarrow \cos 58,2^\circ = \frac{a_1}{12,3} \Rightarrow a_1 = 12,3 \cdot \cos 58,2^\circ = 6,48 \approx 6,5 \text{ cm.}$$



VI. Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle BCF$  lässt sich  $a_2 = \overline{BF}$  mit dem Winkel  $\beta = 74,1^\circ$  bestimmen als:

$$\tan \beta = \frac{h}{a_2} \Rightarrow \tan 74,1^\circ = \frac{10,5}{a_2} \Rightarrow a_2 = \frac{10,5}{\tan 74,1^\circ} = 3 \text{ cm.}$$

VI. Die noch fehlende Seite  $a = \overline{AB}$  des Rechtecks ABDE bestimmt sich dann als:

$$a = a_1 + a_2 = 9,5 \text{ cm.}$$

Die Seite  $a$  ist Seite des Trapezes im Rechteck ABDE, also:  $a_{Tr} = a = 9,5 \text{ cm.}$

VII. Die Trapezseite  $c_{Tr}$  berechnet sich mit  $a_{Tr} = 9,5 \text{ cm}$  und den Seiten  $h = 10,45 \text{ cm}$  und  $\overline{AE} = 6,5 \text{ cm}$  nach dem 2. Strahlensatz:

$$\frac{c_{Tr}}{a_{Tr}} = \frac{h - \overline{AE}}{h} \Rightarrow \frac{c_{Tr}}{9,5} = \frac{10,5 - 6,5}{10,5} \Rightarrow c_{Tr} = \frac{4}{10,5} \cdot 9,5 = 3,62 \approx 3,6 \text{ cm.}$$

VIII. Der gesuchte Flächeninhalt des Trapezes ergibt sich als:

$$A_{Tr} = \frac{a_{Tr} + c_{Tr}}{2} \cdot h_{Tr} = \frac{9,5 + 3,6}{2} \cdot 6,5 = 42,58 \approx 42,6 \text{ cm}^2.$$