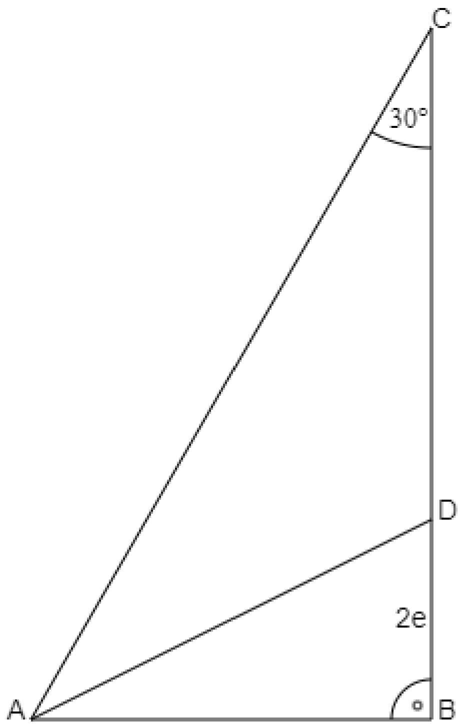
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Dreieck (exakte Berechnung)

Aufgabe: Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und ABD haben die Seite $\overline{AB}$ gemeinsam. Im Dreieck ABC gilt: γ = 30°, im Dreieck ABD: $\overline{BD}$ = 2e. Außerdem halbiert die Seite $\overline{AD}$ den Winkel α an der Ecke A des Dreiecks ABC.



Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ADC sich mit der Formel:

$$A_{ADC} = 4e^2\sqrt{3}$$

berechnen lässt.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

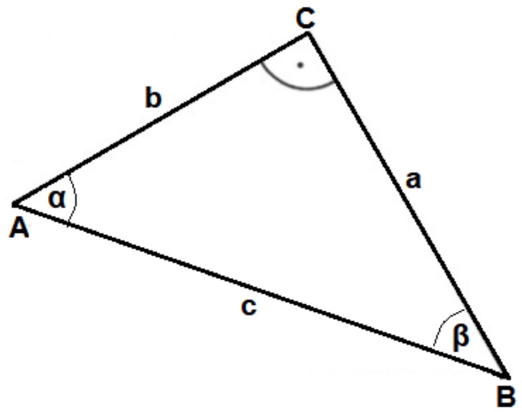
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

u = a + b + c.

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab.$$



II. Die Formvariable e steht in der Geometrie und Trigonometrie für eine beliebige reelle Zahl, die die Grundlage einer geometrisch-trigonometrischen und daher exakten Formel bildet. Seitenlängen sind dabei Vielfaches von e, Flächen Vielfaches von e^2. Bei Anwendung von Trigonometrie und Satz des Pythagoras treten dann Ausdrücke vom Typ

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a \text{ (Wurzel und Quadrat)}$$

$$\sqrt{ae^2} = e\sqrt{a} = ne\sqrt{a_1} \text{ (teilweises Wurzelziehen)}$$

und

$$\frac{e}{\sqrt{a}} = \frac{e}{a}\sqrt{a} \text{ (Ganzrationalmachen des Nenners)}$$

auf. Im Bereich der trigonometrischen Funktionen sind die exakten Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für spezielle Winkel wichtig:

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan 45° = 1,\ \tan 60° = \sqrt{3}$$

Zu beachten ist auch, dass ein 45°-Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auf ein gleichschenkliges Dreieck hinweist, ein 30°- oder 60°-Winkel auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Hälfte das Dreieck mit dem 30°- oder 60°-Winkel ist.

III. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist:

$\alpha = 90° - \gamma = 90° - 30° = 60°$.

Der halbe Winkel ist – wegen der Winkelhalbierenden $\overline{AD}$ – damit $\alpha/2 = 30°$ groß.

IV. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABD ist: $\alpha/2 = 30°$, $\overline{BD} = 2e$. Wir errechnen die Kathete $\overline{AB}$ mit Hilfe des Tangens und erhalten:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \tan 30° = \frac{2e}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{2e}{\tan 30°} = \frac{2e}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6e}{\sqrt{3}} = \frac{6e\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6e\sqrt{3}}{3} = 2e\sqrt{3}.$$

V. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist wiederum: $\alpha = 60°$, $\overline{AB} = 2e\sqrt{3}$, so dass wieder mit dem Tangens die Gegenkathete $\overline{BC}$ bestimmt werden kann:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \tan 60° = \frac{\overline{BC}}{2e\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BC} = 2e\sqrt{3}\cdot\tan 60° = 2e\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 2e\cdot 3 = 6e.$$

VI. Der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks ΔADC ist die Differenz der Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ΔABC und ΔABD. Letztere lassen sich über die schon errechneten Katheten ermitteln als:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot 2e\sqrt{3}\cdot 6e = 6e^2\sqrt{3}$$

$$A_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot 2e\sqrt{3}\cdot 2e = 2e^2\sqrt{3}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔADC ist dann:

$$A_{ADC} = A_{ABC} - A_{ABD} = 6e^2\sqrt{3} - 2e^2\sqrt{3} = 4e^2\sqrt{3},$$

was zu zeigen war.

www.michael-buhlmann.de / 02.2019 / Aufgabe 780