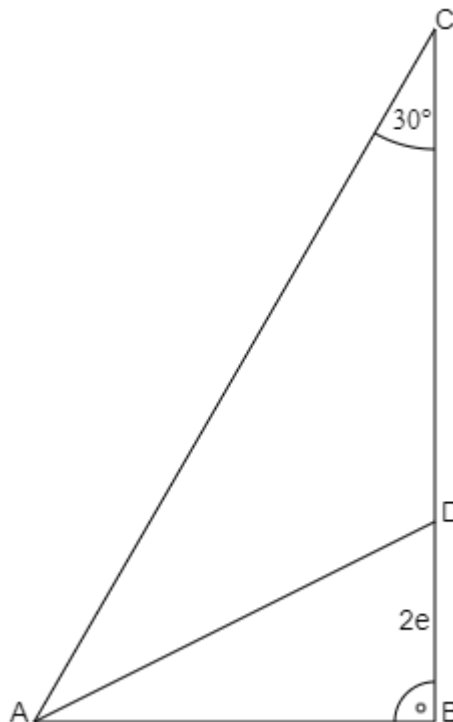


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Dreieck (exakte Berechnung)

Aufgabe: Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und ABD haben die Seite \overline{AB} gemeinsam. Im Dreieck ABC gilt: $\gamma = 30^\circ$, im Dreieck ABD: $\overline{BD} = 2e$. Außerdem halbiert die Seite \overline{AD} den Winkel α an der Ecke A des Dreiecks ABC.



Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass der Umfang des Dreiecks ADC sich mit der Formel:

$$u_{ADC} = 4e(2 + \sqrt{3})$$

berechnen lässt.

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α , β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

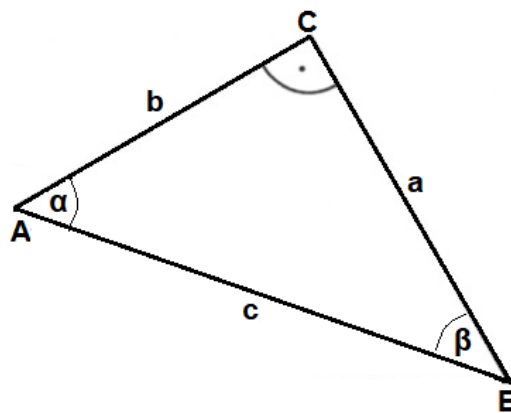
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a , b , c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a , b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Die Formvariable e steht in der Geometrie und Trigonometrie für eine beliebige reelle Zahl, die die Grundlage einer geometrisch-trigonometrischen und daher exakten Formel bildet. Seitenlängen sind dabei Vielfaches von e , Flächen Vielfaches von e^2 . Bei Anwendung von Trigonometrie und Satz des Pythagoras treten dann Ausdrücke vom Typ

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a \quad (\text{Wurzel und Quadrat})$$

$$\sqrt{ae^2} = e\sqrt{a} = ne\sqrt{a_1} \quad (\text{teilweises Wurzelziehen})$$

und

$$\frac{e}{\sqrt{a}} = \frac{e}{a} \sqrt{a} \quad (\text{Ganzrationalmachen des Nenners})$$

auf. Im Bereich der trigonometrischen Funktionen sind die exakten Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für spezielle Winkel wichtig:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan 45^\circ = 1, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Zu beachten ist auch, dass ein 45° -Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auf ein gleichschenkliges Dreieck hinweist, ein 30° - oder 60° -Winkel auf ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Hälfte das Dreieck mit dem 30° - oder 60° -Winkel ist.

III. Der Umfang des Dreiecks $\triangle ADC$ ist die Summe der Seiten \overline{AD} , \overline{CD} und \overline{AC} , so dass die drei Seiten im Folgenden zu bestimmen sind.

IV. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist:

$$\alpha = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Der halbe Winkel ist – wegen der Winkelhalbierenden \overline{AD} – damit $\alpha/2 = 30^\circ$ groß.

IV. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABD$ ist: $\alpha/2 = 30^\circ$, $\overline{BD} = 2e$. Wir errechnen die Kathete \overline{AB} mit Hilfe des Tangens und erhalten:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{2e}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{2e}{\tan 30^\circ} = \frac{2e}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2e}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2e\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2e\sqrt{3}}{3} = 2e\sqrt{3}.$$

Zudem berechnen wir noch die Hypotenuse \overline{AD} im Dreieck; dies erfolgt mit dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = (2e\sqrt{3})^2 + (2e)^2 = 4e^2 \cdot 3 + 4e^2 = 12e^2 + 4e^2 = 16e^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16e^2} = 4e.$$

V. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ist wiederum: $\alpha = 60^\circ$, $\overline{AB} = 2e\sqrt{3}$, so dass wieder mit dem Tangens die Gegenkathete \overline{BC} bestimmt werden kann:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{2e\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BC} = 2e\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 2e\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2e \cdot 3 = 6e.$$

Auch hier berechnen wir noch die Hypotenuse \overline{AC} mit dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (2e\sqrt{3})^2 + (6e)^2 = 4e^2 \cdot 3 + 36e^2 = 12e^2 + 36e^2 = 48e^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AC} = \sqrt{48e^2} = e\sqrt{48} = 4e\sqrt{3}.$$

VI. Die Seite \overline{CD} des Dreiecks $\triangle ADC$ bestimmt sich als:

$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 6e - 2e = 4e.$$

Wegen $\overline{AD} = \overline{CD}$ ist das Dreieck $\triangle ADC$ im Übrigen ein gleichschenkliges Dreieck.

VII. Der gesuchte Umfang des allgemeinen Dreiecks $\triangle ADC$ ist die Summe der errechneten Seiten \overline{AD} , \overline{CD} und \overline{AC} , also:

$$u_{ADC} = \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC} = 4e + 4e + 4e\sqrt{3} = 8e + 4e\sqrt{3} = 4e(2 + \sqrt{3}),$$

was zu zeigen war.