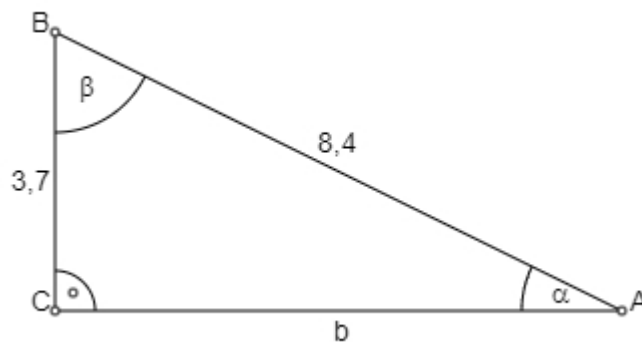


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Trigonometrie

> Rechtwinkliges Dreieck

Aufgabe: Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ ($\gamma = 90^\circ$) sind die fehlenden Größen, der Umfang und der Flächeninhalt zu berechnen.



(Größen in Zentimetern)

Lösung: I. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \alpha \text{)}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ (Winkel } \beta \text{)}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

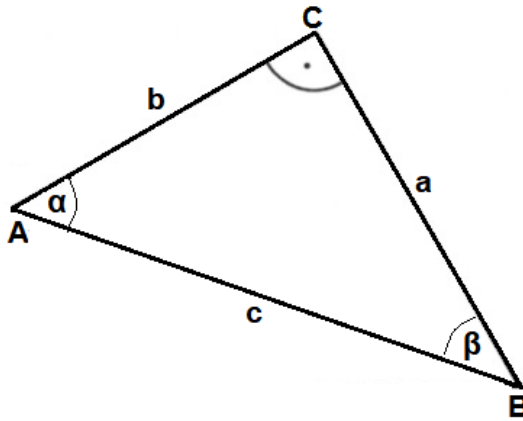
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ - \beta, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Im Dreieck $\triangle ABC$ sind laut Zeichnung die Kathete $a = 3,7$ cm und die Hypotenuse $c = 8,4$ cm gegeben. Gemäß dem Satz des Pythagoras folgt für die fehlende Kathete b des Dreiecks:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 8,4^2 - 3,7^2 = 56,87 \Rightarrow b = \sqrt{56,87} = 7,54 \approx 7,5 \text{ cm.}$$

Z.B. mit dem Sinus berechnen wir den Winkel α mit Gegenkathete $a = 3,7$ cm und Hypotenuse $c = 8,4$ cm:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3,7}{8,4} = 0,4405 \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0,4405) = 26,13^\circ \approx 26,1^\circ.$$

Schließlich gilt für den Winkel β (letztlich auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck bei rechtem Winkel $\gamma = 90^\circ$):

$$\beta = 90^\circ - 26,1^\circ = 63,9^\circ.$$

III. Für den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ gilt:

$$u = a + b + c = 3,7 + 7,5 + 8,4 = 19,6 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ errechnet sich mit den Katheten $a = 7,4$ cm, $b = 9,7$ cm als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3,7 \cdot 7,5 = 13,875 \approx 13,9 \text{ cm}^2.$$