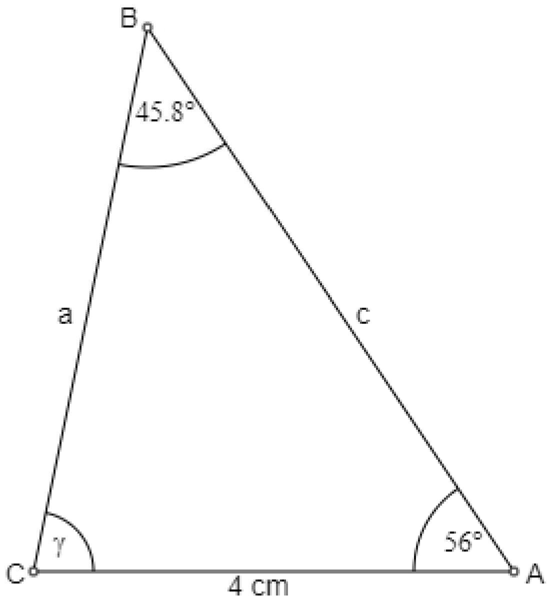
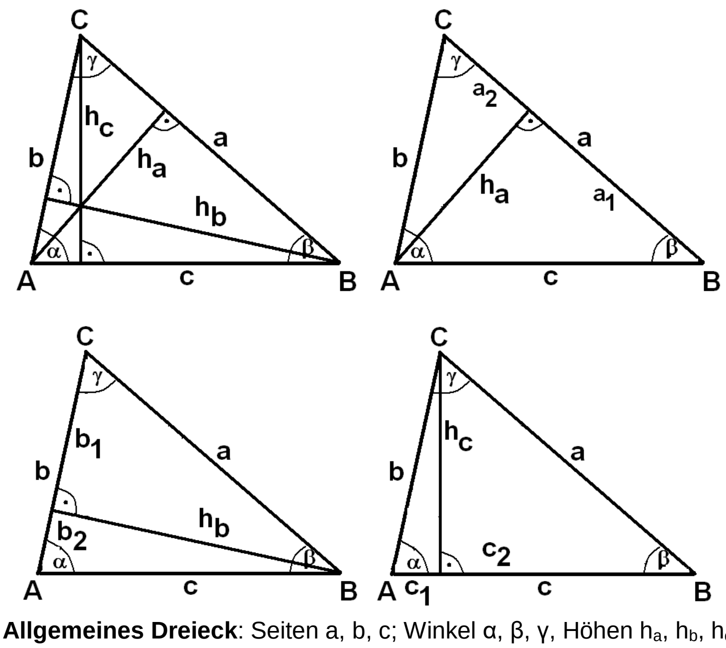
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Allgemeines Dreieck

Aufgabe: Im allgemeinen Dreieck ΔABC sind die fehlenden Größen, der Umfang und der Flächeninhalt zu berechnen.



Lösung: I. In einem allgemeinen, spitzwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ lassen sich Seiten und Winkel berechnen, indem bei vorgegebenen zwei Seiten und einem Winkel bzw. bei vorgegebenen zwei Winkeln und einer Seite das Dreieck so durch eine Höhe h_a, h_b, h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt wird, dass nicht der einzige vorgegebene Winkel oder die einzige vorgegebene Seite durch die Höhe geteilt wird.



Allgemeines Dreieck: Seiten a, b, c; Winkel α, β, γ, Höhen h_a, h_b, h_c

Der Satz des Pythagoras und die trigonometrischen Bezüge liefern dann in den rechtwinkligen Dreiecken, die durch Aufteilung des allgemeinen Dreiecks entstanden sind, die Beziehungen:

Höhe h_a: $a_1 + a_2 = a$, $a_1^2 + h_a^2 = c^2$, $a_2^2 + h_a^2 = b^2$,

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c},\ \cos\beta = \frac{a_1}{c},\ \tan\beta = \frac{h_a}{a_1},\ \sin\gamma = \frac{h_a}{b},\ \cos\gamma = \frac{a_2}{b},\ \tan\gamma = \frac{h_a}{a_2}.$$

Höhe h_b: $b_1 + b_2 = b$, $b_1^2 + h_b^2 = a^2$, $b_2^2 + h_b^2 = c^2$,

$$\sin\alpha = \frac{h_b}{c},\ \cos\alpha = \frac{b_2}{c},\ \tan\alpha = \frac{h_b}{b_2},\ \sin\gamma = \frac{h_b}{a},\ \cos\gamma = \frac{b_1}{a},\ \tan\gamma = \frac{h_b}{b_1}.$$

Höhe h_c: $c_1 + c_2 = c$, $c_1^2 + h_c^2 = b^2$, $c_2^2 + h_c^2 = a^2$,

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b},\ \cos\alpha = \frac{c_1}{b},\ \tan\alpha = \frac{h_c}{c_1},\ \sin\beta = \frac{h_c}{a},\ \cos\beta = \frac{c_2}{a},\ \tan\beta = \frac{h_c}{c_2}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ gelten noch die Beziehungen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,\ \alpha = 180° - \beta - \gamma,\ \beta = 180° - \alpha - \gamma,\ \gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

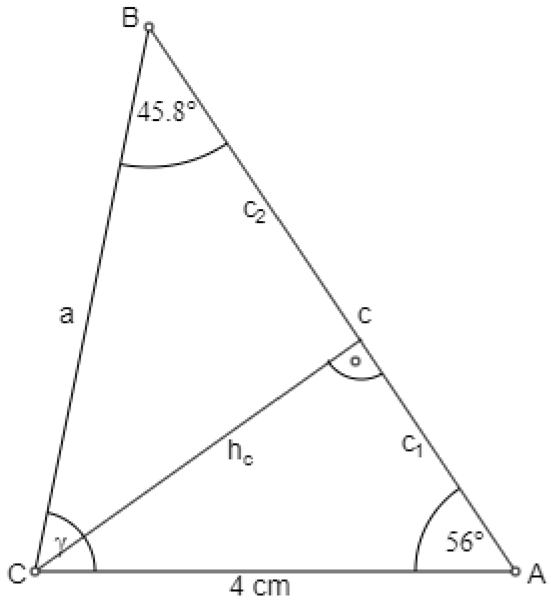
Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit der Grundseite und der Höhe ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ah_a,\ A = \frac{1}{2}bh_b,\ A = \frac{1}{2}ch_c.$$

II. Es sind gemäß der Aufgabenstellung im allgemeinen Dreieck ΔABC eine Seite und zwei Winkel gegeben. Damit ist laut nachstehender Zeichnung eine Höhe so einzutragen, dass diese nicht die einzige vorgegebene Seite b = 4 cm teilt. Wir entscheiden uns für die Höhe h_c auf c und erhalten zwei rechtwinklige Dreiecke, in die das allgemeine Dreieck aufgeteilt wird; die Aufteilung betrifft auch die Dreieckseite c mit den Teilstrecken c_1 und c_2:



III. Wir betrachten das untere rechtwinklige Dreieck im Dreieck ΔABC und haben mit dem Winkel α = 56°, der Ankathete c_1, der Gegenkathete h_c und der Hypotenuse b = 4 cm die fehlenden Seitenlängen wie folgt zu berechnen:

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow \sin 56° = \frac{h_c}{4} \Rightarrow h_c = 4\cdot\sin 56° = 3{,}32 \approx 3{,}3 \text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{c_1}{b} \Rightarrow \cos 56° = \frac{c_1}{4} \Rightarrow c_1 = 4\cdot\cos 56° = 2{,}24 \approx 2{,}2 \text{ cm}.$$

IV. Mit dem Winkel β = 45,8°, der Gegenkathete h_c = 3,32 cm, der Ankathete c_2 und der Hypotenuse a haben wir im <u>oberen rechtwinkligen Dreieck</u> innerhalb des Dreiecks ΔABC Ankathete und Hypotenuse auszurechnen:

$$\tan\beta = \frac{h_c}{c_2} \Rightarrow \tan 45{,}8° = \frac{3{,}32}{c_2} \Rightarrow c_2 = \frac{3{,}32}{\tan 45{,}8°} = 3{,}23 \approx 3{,}2 \text{ cm}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \Rightarrow \sin 45{,}8° = \frac{3{,}32}{a} \Rightarrow a = \frac{3{,}32}{\sin 45{,}8°} = 4{,}63 \approx 4{,}6 \text{ cm.}$$

V. Damit sind alle <u>Seiten</u> bestimmt, wenn wir noch:

$c = c_1 + c_2 = 2{,}24 + 3{,}23 = 5{,}47 \approx 5{,}5$ cm

berücksichtigen.

VI. Der fehlende <u>Winkel</u> γ errechnet sich mit der Winkelsumme im allgemeinen Dreieck als:

γ = 180° – α – β = 180° – 56° – 45,8° = 78,2°.

VII. Für den <u>Umfang</u> des Dreiecks ΔABC gilt:

u = a + b + c = 4,63 + 4 + 5,47 = 14,1 cm.

Der <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ΔABC errechnet sich mit der Seite c und der Höhe h_c als:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}32 \cdot 5{,}47 = 9{,}0802 \approx 9{,}1 \text{ cm}^2.$$

Lösung:

Seiten
a = 4.6 cm
b = 4 cm
c = 5.5 cm

Winkel
α = 56°
β = 45.8°
γ = 78.2°

Höhen
ha = 3.9 cm
hb = 4.5 cm
hc = 3.3 cm

Umfang u = 14.1 cm
Fläche A = 9.1 cm²

www.michael-buhlmann.de / 10.2020 / Aufgabe 1113