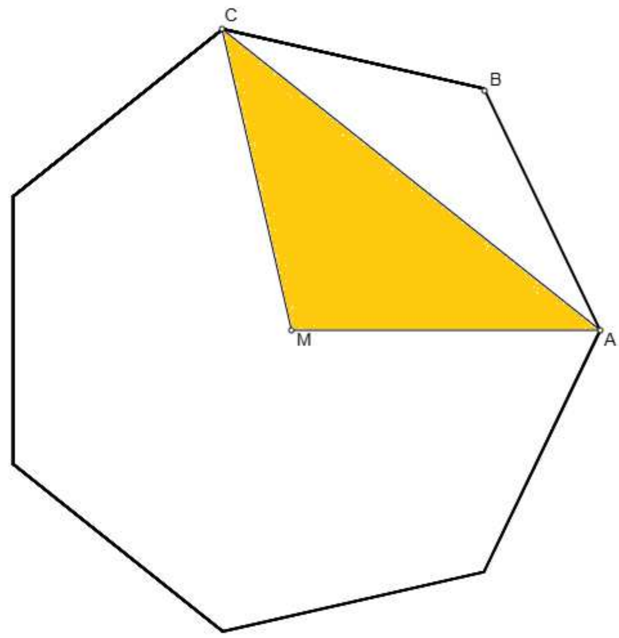
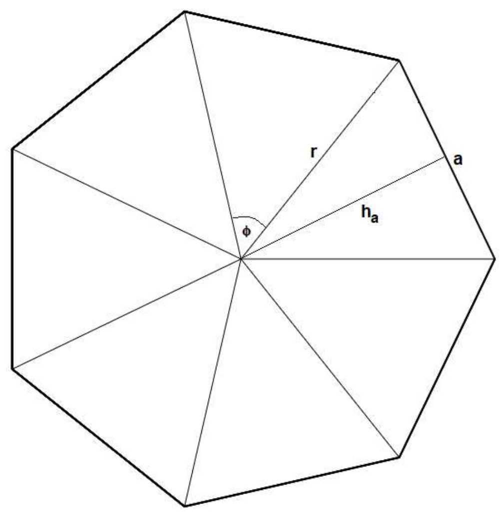
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Trigonometrie
> Regelmäßiges Siebeneck

Aufgabe: Ein regelmäßiges Siebeneck hat einen Umfang von 56 cm. Berechne Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ΔACM. Dabei ist M der Mittelpunkt, A, C sind zwei Ecken des Siebenecks.



Lösung: I. Für ein regelmäßiges Siebeneck gilt:



Regelmäßiges 7-Eck

Seitenlänge a ->

7 gleichschenklige Dreiecke mit:

1) Dreieckinnenwinkel: $\varphi = \frac{360°}{7} = 51.4286°$
2) Halber Winkel: $\frac{\varphi}{2} = \frac{180°}{7} = 25.7143°$
3) Dreieckshöhe: $h_a = \frac{a}{2 \cdot \tan(25.7143°)}$ = 1.0383a
4) Flächeninhalt/Dreieck: $A = \frac{a^2}{4 \cdot \tan(25.7143°)}$ = 0.5192a²
5) Vieleckradius: $r = \frac{a}{2 \cdot \sin(25.7143°)}$ = 1.1524a ->

Vieleck mit:

6) Flächeninhalt/Vieleck: $A = \frac{7a^2}{2 \cdot \tan(25.7143°)}$ = 3.6339a²
7) Umfang/Vieleck: u = 7a.

II. Die Seitenlänge a des vorgegebenen regelmäßigen Siebenecks beträgt bei einem Umfang von 56 cm:

a = 56:7 = 8 cm.

Weiter gilt für die am Mittelpunkt des Siebenecks liegenden Innenwinkel der sieben gleichschenkligen Dreiecke, die das regelmäßige Siebeneck bilden:

φ = 360:7 = 51,43°.

für den Außenwinkel an jeder Ecke des Siebenecks:

III. Für den Umfang des gleichschenkligen Dreiecks ΔACM gilt:

u = 2r + $\overline{AC}$,

wobei sich der Radius r = $\overline{MA} = \overline{MC}$ des Siebenecks mit der Kantenlänge a = 8 cm berechnet durch:

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Leftrightarrow \sin 25{,}72° = \frac{4}{r} \Leftrightarrow r = \frac{4}{\sin 25{,}72°} = 9{,}22 \text{ cm.}$$

Das gleichschenklige Dreieck ΔACM lässt sich entlang der Strecke $\overline{MB}$ in zwei rechtwinklige unterteilen. Im rechtwinkligen Dreieck ΔMAN kann nun $\overline{AC}$/2 berechnet werden vermöge:

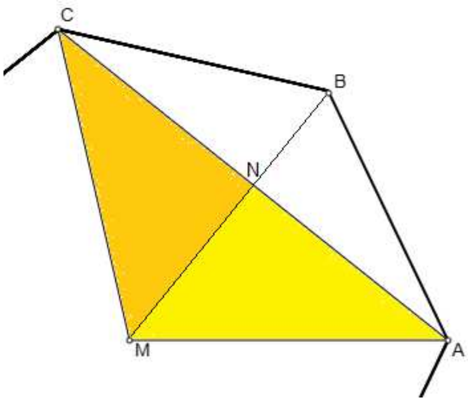
$$\sin\varphi = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{\overline{MA}} \Leftrightarrow \sin 51{,}43° = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{9{,}22} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{2} = 9{,}22 \cdot \sin 51{,}43° = 7{,}21 \text{ cm.}$$

Es folgt:

$\overline{AC}$ = 2·7,21 = 14,42 cm,

so dass für den gesuchten Umfang ergibt:

u = 2·9,22 + 14,42 = 32,86 ≈ 32,9 cm.



IV. Für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks ΔACM gilt:

A = $\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MN}$

mit Berechnung der Strecke $\overline{MN}$ etwa gemäß dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{MA}^2 - \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2} = \sqrt{9{,}22^2 - 7{,}21^2} = \sqrt{33{,}02} = 5{,}75 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt ergibt sich damit als:

A = $\frac{1}{2} \cdot 14{,}42 \cdot 5{,}75$ = 41,46 ≈ 41,5 cm^2.